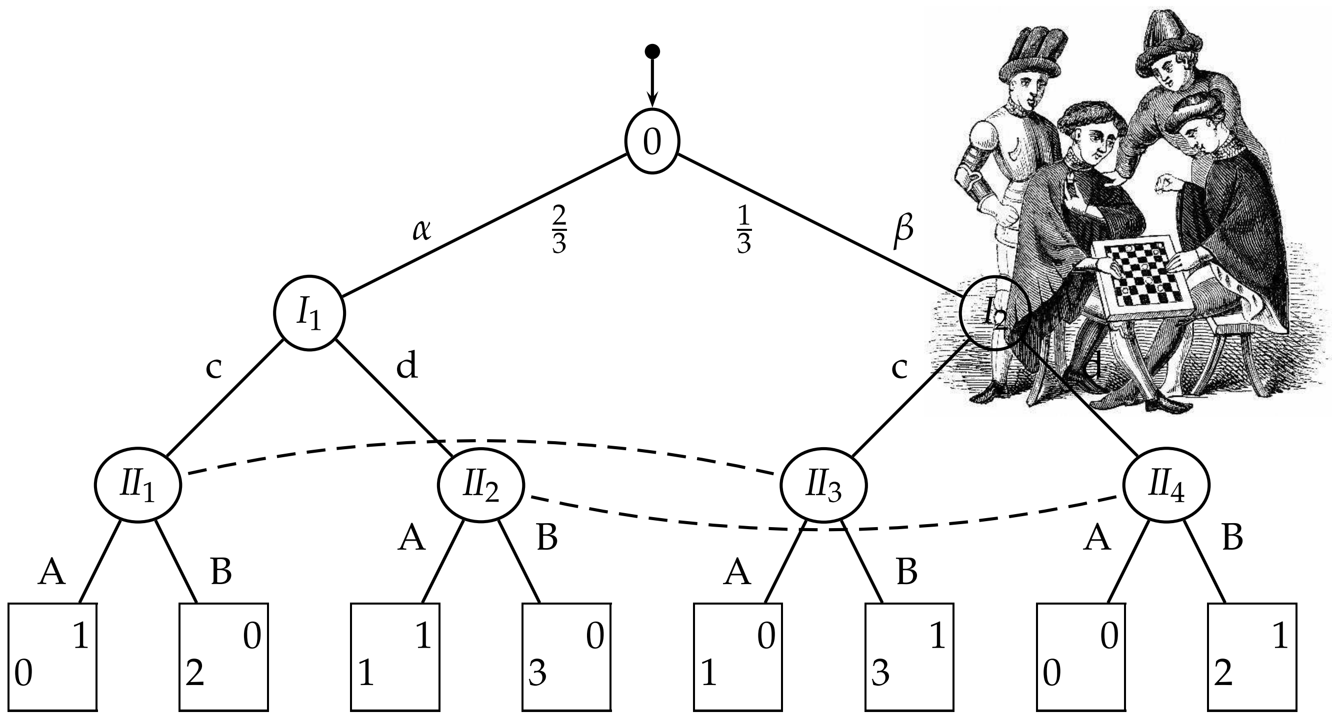
Quantitative Wirtschaftstheorie
Spieltheorie — BW24.2



Oliver Kirchkamp

Dieses Dokument soll das Modul BW24.2 ergänzen. Es stellt kein „Vorlesungsskript“ dar und soll auch kein Lehrbuch ersetzen. Es gibt hervorragende Lehrbücher für die Gebiete die das Modul abdecken möchte. In der Veranstaltung werden einige erwähnt. Diese Lehrbücher präsentieren den Stoff in sehr unterschiedlicher Reihenfolge und mit unterschiedlicher Gewichtung. Hier möchten wir Ihnen die Orientierung über Reihenfolge und Gewichtung in der Veranstaltung geben. Vor allem wollen wir die Vorbereitung auf die Veranstaltung erleichtern. Außerdem sammeln wir in diesem Dokument einige Beispielaufgaben.

Inhaltsverzeichnis

Index

1 Einführung

- Inhalt des Moduls

  Nur eine Teilmenge der Gebiete, die mit quantitativer Wirtschaftstheorie zu tun haben:

  - Spieltheorie
  - Verhandlungstheorie
  - Auktionstheorie
  - Verhaltensökonomie / Experimentelle Wirtschaftsforschung

- Ziel

  - "thinking strategically"

- Voraussetzungen:

  - viel 'logisches' Denken
  - 'relativ' wenige mathematische Vorkenntnisse
  - wenig 'soziales' Denken

- Handout zur Vorbereitung: `http://www.kirchkamp.de/`

- Aufbau der Veranstaltung:

  - 1.+2. Woche: Definition und Konzepte (anstrengend und formal).
  - Rest: Anwendungen und Erweiterungen (weniger formal)

  🚲 Beispiele in der Vorlesung.

  ✍ Übungen in der Übung.Um den Lernerfolg zu maximieren, lösen Sie die Übungen möglichst vorher. Klavierspielen lernen Sie nicht durch Zuhören. Wirtschaftstheorie lernen Sie auch nicht durch Zuschauen. In beiden Fällen ist Eigenarbeit unvermeidlich.

1.1 Lehrbücher

- Kenneth Binmore. Fun and Games. D. C. Heath, Lexington, MA., 1992.
- Drew Fudenberg and Jean Tirole. Game Theory. MIT Press, 1995.
- Robert Gibbons. Game Theory for Applied Economists — A Primer in Game Theory. Princeton University Press, 1992.
- Martin Osborne and Ariel Rubinstein. A Course in Game Theory. MIT Press, 1995.

1.2 Was ist Spieltheorie

	kooperative Spieltheorie	nichtkooperative Spieltheorie
Frage:	Wie wird eine vorhandene Ressource unter mehrere Spieler aufgeteilt?	welche Züge wählen Spieler?
was wird modelliert:	Spieler, Auszahlungen	Spieler, Strategien, Auszahlungen
was wird nicht modelliert:	Interaktion zwischen Spielern	Entstehung des Spiels

1.3 Bedeutung von Spieltheorie

positive Theorie	normative Theorie
Spieltheorie ist entstanden als Teilgebiet der Mathematik. Es ist aber möglich, spieltheoretische Modelle so zu interpretieren, dass sie Anwendungen in zahlreichen Fachgebieten finden: Biologie, Volkswirtschaft, Betriebswirtschaft, Soziologie, Psychologie, Landesverteidigung...	Spieltheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik und macht Aussagen über mathematische Objekte. Mathematiker haben die Angewohnheit, mathematischen Objekten Namen zu geben, die auch im wirklichen Leben eine Bedeutung haben. In der Spieltheorie finden wir z.B. die folgenden Objekte: Spiel, Spieler, Strategien, Gleichgewicht Reaktionsfunktion, beste Antwort, . . . (Die Mathematiker hätten die Objekte auch anders nennen können: Salat, Gemüse, Dressing, Menü, passendes Gericht... Die mathematischen Sätze würden sich ebenso gut anhören.) Im wirklichen Leben begegnen wir Objekten mit Namen wie sie auch von der Spieltheorie verwendet werden. Eine Interpretation der spieltheoretischen Objekte als Objekte aus dem wirklichen Leben hat oft fatale Folgen.

1.3.1 Beispiel (Guessing Game)

Dass der Transfer vom wirklichen Leben zur Spieltheorie und zurück nicht immer so klappt, verdeutlicht das folgende Spiel:

10 Spieler wählen gleichzeitig und unabhängig von einander eine ganze Zahl zwischen 2 und 100.

Diejenige Person gewinnt einen Preis, deren Zahl am nächsten an $\frac{2}{3}$ des Mittelwertes aller Zahlen liegt.

Wenn mehrere Spieler gewinnen, erhält zufällig einer dieser Spieler den Preis.

1.4 Kommentar: Vergleich Spieltheorie / wahres Leben

Probieren Sie es aus: Spielen Sie dieses Spiel mit ein paar anderen Leuten (10 sollten sie schon zusammenbekommen). Sie werden schnell merken, dass Sie mit dem spieltheoretischen Gleichgewicht nicht gewinnen.

Sie haben gerade ein sehr einfaches Spiel betrachtet.

Die Spieltheorie betrachtet eine hypothetische Welt, in der alle Spieler rational sind, in der ferner alle Spieler dies wissen, und ferner alle Spieler wissen, dass alle wissen, dass alle rational sind, usw. ad infinitum. Wir nennen diese Hypothese auch common knowledge of rationality

In einer solchen hypothetischen Welt macht die Spieltheorie zwei Aussagen zu diesem Spiel:

- Alle Spieler werden eine ganz bestimmte Zahl spielen.
- Sie sollten ebenfalls diese Zahl spielen.

Die erste Aussage ist beschreibend (positiv), die zweite normativ. Beide Aussagen sind jedoch im wirklichen Leben schlicht falsch.

(in der hypothetischen Welt, in der alle Spieler rational ist, und in der common knowledge of rationality besteht, würden beide Aussagen zutreffen)

Verwechseln Sie also nicht Spieltheorie mit dem wirklichen Leben.

Kommentar zum Kommentar: Spieltheorie ist dennoch nicht völlig nutzlos. Es gibt einige Sitationen, in denen sich Leute überraschenderweise ähnlich verhalten wie ihre spieltheoretischen Entsprechungen — das wirkliche Leben ist der hypothetischen spieltheoretischen Welt ähnlich. In solchen Situationen ist es tatsächlich gut, sich so zu verhalten, wie es Spieltheorie für eine hypothetische, vollkommen rationale Welt vorsieht.

Im Laufe der Vorlesung werden wir auf einige solcher Situationen eingehen.

Spieltheorie macht allerdings keine Aussagen darüber, wann sie auf das wirkliche Leben übertragbar ist.

2 Definitionen für Spiele in Normalform

2.1 Einführung

Die Spiele, die wir im Laufe der Vorlesung betrachten, lassen sich in zwei Gruppen einteilen.

- Spiele in Normalform
- Spiele in extensiver Form
  - Spiele mit vollständiger Information
  - Spiele mit unvollständiger Information

Wir werden zunächst Spiele in Normalform betrachten. Ein einfaches Spiel, das in Normalform dargestellt werden kann, ist Stein-Schere-Papier.

Wie alle Spiele in Normalform lässt sich auch Stein-Schere-Papier beschreiben durch

- Spieler
- Strategien
- Auszahlungen.

Bei Stein-Schere-Papier gibt es zwei Spieler .Jeder Spieler hat drei Strategien , nämlich entweder „Stein" oder „Schere" oder „Papier".Je nachdem, welcher Spieler welche Strategie wählt, ergeben sich Auszahlungen .

Wir werden diese Objekte in den nächsten Abschnitten genauer definieren.

Notation:

Spieler	$\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$
reine Strategien von Spieler i	$S_i = \{s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^m\}$
Kombination reiner Strategien	$s = \{s_1, \ldots, s_n\}$
i-unvollständige Kombination reiner Strategien	$s_{-i} = \{s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\}$
Auszahlungsfunktion von Spieler i	$u_i(s)$
gemischte Strategie von Spieler i	σ_i
Menge der gemischten Strategien von Spieler i	Σ_i
Kombination (gemischter) Strategien	σ
i-unvollständige Kombination gemischter Strategien	σ_{-i}
Auszahlungsfunktion von Spieler i	$u_i(\sigma)$

2.2 Spieler

Ganz allgemein betrachten wir ein Spiel mit n Spielern (Sehr oft wird $n = 2$ sein). Die Menge aller Spieler nennen wir $\mathbb{I}$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$.

Im Beispiel Stein-Schere-Papier haben wir nur zwei Spieler. $\mathbb{I} = \{1, 2\}$.

2.3 reine Strategien

2.3.1 Menge der reinen Strategien eines Spielers

Definition 1 (Menge der reinen Strategien)**.** Die Menge der reinen Strategien eines Spielers $i \in \mathbb{I}$ nennen wir $S_i = \{s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^m\}$. Sie gibt alle reinen Strategien für Spieler i an.

Eine bestimmte reine Strategie von Spieler i werden wir mit $s_i \in S_i$ bezeichnen.

Im Beispiel Stein-Schere-Papier können die Mengen der reinen Strategien z.B. wie folgt aufgeschrieben werden.

$$S_1 = \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}\}$$

und

$$S_2 = \{\text{Stein}', \text{Schere}', \text{Papier}'\}$$

2.3.2 Definition Kombination reiner Strategien

Definition 2 (Kombination von reinen Strategien)**.** Eine Kombination von reinen Strategien $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ gibt für jeden Spieler $i \in \{1, \ldots, n\}$ an, welche reine Strategie er wählt.

Beispiel:

$$s = \{\text{Stein}, \text{Schere}'\}$$

ist bei Stein-Schere-Papier eine mögliche Kombination von reinen Strategien.

Wir nennen die Menge aller möglichen Kombinationen von reinen Strategien S.

$$S = \prod_{i \in \mathbb{I}} S_i$$

2.3.3 Definition unvollständige Kombination reiner Strategien

Zuweilen werden wir uns dafür interessieren was passiert, wenn ein Spieler, nennen wir ihn Spieler i, von seiner Strategie abweicht während alle anderen bei ihrer Strategie bleiben. Wir führen dazu den Begriff der unvollständigen Kombination von reinen Strategien ein.

Definition 3 (unvollständige Kombination reiner Strategien)**.** Sei $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ eine Kombination von reinen Strategien für ein Spiel. Dann gibt $s_{-i} = \{s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\}$ für alle Spieler, außer Spieler i an, welche reine Strategie sie spielen.

Beachten Sie die Schreibweise s_{-i}.
Beispiel:

$$s_{-1} = \{-, \text{Schere}'\}$$

ist in Stein-Schere-Papier eine unvollständige Kombination von reinen Strategien Sie spezifiert nicht für Spieler 1, was er zu tun hat, wohl aber für alle anderen Spieler (in diesem Fall Spieler 2).

Wir nennen die Menge der unvollständigen Kombinationen von reinen Strategien S_{-i}.

$$S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$$

$$S_{-1} = \{\{-, \text{Stein}'\}, \{-, \text{Schere}'\}, \{-, \text{Papier}'\}\}$$

ist in Stein-Schere-Papier die Menge aller unvollständigen Kombinationen von reinen Strategien bezüglich Spieler 1.

2.3.4 Auszahlungsfunktion

Jede Kombination von reinen Strategien $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ führt zu Auszahlungen für jeden Spieler $i \in \mathbb{I}$.

Definition 4 (Auszahlungsfunktion)**.** Die Auszahlungsfunktion $u_i(s)$ gibt die Auszahlung von Spieler i gegeben eine Kombination von reinen Strategien s an.

Beispiel: Wenn wir einen Gewinn mit $+1$ und einen Verlust mit -1 bezeichnen, können wir die Auszahlungsfunktion von Stein-Schere-Papier für Spieler 1 wie folgt aufschreiben:

$$u_1(s) = \begin{cases} +1 & \text{falls } s \in \left\{ \begin{array}{c} \{\text{Stein}, \text{Schere}'\}, \\ \{\text{Schere}, \text{Papier}'\}, \\ \{\text{Papier}, \text{Stein}'\} \end{array} \right\} \\ 0 & \text{falls } s \in \left\{ \begin{array}{c} \{\text{Stein}, \text{Stein}'\}, \\ \{\text{Schere}, \text{Schere}'\}, \\ \{\text{Papier}, \text{Papier}'\} \end{array} \right\} \\ -1 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

Dies ist allerdings keine besonders übersichtliche Schreibweise. Wir werden später die übersichtlichere Bi-Matrix-Form kennenlernen.

3 Spiel in Normalform

3.1 Definition

Definition 5 (Darstellung eines Spiels in Normalform)**.** Die Darstellung eines n-Personen Spiels in Normalform besteht aus

- einer Menge von n Spielern $i \in \mathbb{I}$.
- für jeden Spieler $i \in \mathbb{I}$ eine Menge der reinen Strategien S_i.
- für jeden Spieler $i \in \mathbb{I}$ eine Auszahlungsfunktion u_i die die Auszahlung für jede Kombination von reinen Strategien $s \in \prod_{i \in \mathbb{I}} S_i$ beschreibt.

Wir schreiben ein Spiel in Normalform $G = \{\mathbb{I}, S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$.

3.2 Beispiel

Stein-Schere-Papier — Formalisierung:

Die Menge der Spieler besteht aus Spieler 1 und Spieler 2:

$$\mathbb{I} = \{1, 2\}$$

Die Menge der reinen Strategien ist

$$S_1 = \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}\}, \quad S_2 = \{\text{Stein}', \text{Schere}', \text{Papier}'\}$$

Für jede Kombination von reinen Strategien gibt es eine Auszahlung für Spieler 1 und eine Auszahlung für Spieler 2.

$$\begin{array}{lclclcr}
u_1(\text{Stein}, \text{Schere}') & = & u_1(\text{Schere}, \text{Papier}') & = & u_1(\text{Papier}, \text{Stein}') & = & 1 \\
u_1(\text{Stein}, \text{Stein}') & = & u_1(\text{Schere}, \text{Schere}') & = & u_1(\text{Papier}, \text{Papier}') & = & 0 \\
u_1(\text{Schere}, \text{Stein}') & = & u_1(\text{Papier}, \text{Schere}') & = & u_1(\text{Stein}, \text{Papier}') & = & -1 \\
\hline
u_2(\text{Stein}, \text{Schere}') & = & u_2(\text{Schere}, \text{Papier}') & = & u_2(\text{Papier}, \text{Stein}') & = & -1 \\
u_2(\text{Stein}, \text{Stein}') & = & u_2(\text{Schere}, \text{Schere}') & = & u_2(\text{Papier}, \text{Papier}') & = & 0 \\
u_2(\text{Schere}, \text{Stein}') & = & u_2(\text{Papier}, \text{Schere}') & = & u_2(\text{Stein}, \text{Papier}') & = & 1
\end{array}$$

3.2.1 Einfache Darstellung in Bi-Matrix-Form

Die Darstellung oben war etwas umständlich. In dem folgenden Bild werden alle Informationen übersichtlich dargestellt:

		Spieler 2		
		Stein′	Schere′	Papier′
Spieler 1	Stein	0 0	−1 1	1 −1
	Schere	1 −1	0 0	−1 1
	Papier	−1 1	1 −1	0 0

Wir erläutern die einzelnen Komponenten auf den folgenden Seiten.

3.2.2 Darstellung der Spieler

Die Namen der Spieler werden oben über der Matrix und links daneben geschrieben (Sie sehen schon, dass diese Darstellung vor allem bei zwei Spielern praktisch ist, bei drei und mehr Spielern wird es kompliziert).

		Spieler 2		
		Stein′	Schere′	Papier′
Spieler 1	Stein	0 0	−1 1	1 −1
	Schere	1 −1	0 0	−1 1
	Papier	−1 1	1 −1	0 0

3.2.3 Darstellung der Strategien

Die Namen der reinen Strategien beider Spieler werden über die Spalten und vor die Zeilen geschrieben.

		Spieler 2		
		Stein′	Schere′	Papier′
Spieler 1	Stein	0 0	−1 1	1 −1
	Schere	1 −1	0 0	−1 1
	Papier	−1 1	1 −1	0 0

3.2.4 Darstellung der Auszahlungen

Jede Zelle der Matrix beschreibt die Auszahlung bei einer Kombination von reinen Strategien.

		Spieler 2		
		Stein′	Schere′	Papier′
Spieler 1	Stein	0 0	−1 1	1 −1
	Schere	1 −1	0 0	−1 1
	Papier	−1 1	1 −1	0 0

Hier sind zum Beispiel die Auszahlungen der Strategienkombination $\{\text{Stein}, \text{Schere}'\}$ hervorgehoben. Die Auszahlungen sind $u_1(\text{Stein}, \text{Schere}') = 1$ und $u_2(\text{Stein}, \text{Schere}') = -1$.

Verwechseln Sie die Auszahlungen $\left(\text{im Beispiel } \begin{smallmatrix} & -1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right)$ nicht mit der Kombination von reinen Strategien (im Beispiel $\{\text{Stein}, \text{Schere}\}$).

Die Auszahlungen werden in die Zellen geschrieben. Alle Auszahlungen für Spieler 1 links unten…

		Spieler 2		
		Stein′	Schere′	Papier′
Spieler 1	Stein	0 0	−1 1	1 −1
	Schere	1 −1	0 0	−1 1
	Papier	−1 1	1 −1	0 0

…und alle Auszahlungen für Spieler 2 rechts oben…

		Spieler 2		
		Stein′	Schere′	Papier′
Spieler 1	Stein	0 0	−1 1	1 −1
	Schere	1 −1	0 0	−1 1
	Papier	−1 1	1 −1	0 0

3.2.5 Schreibweisen für Auszahlungen

In unterschiedlichen Lehrbüchern werden unterschiedliche Schreibweisen verwendet. Wir werden möglichst immer die Auszahlung von Spieler 1 links unten, und die von Spieler 2 rechts oben schreiben:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & 2 \\ 1 & \end{array}}$$

In der Literatur finden Sie aber auch die folgenden Schreibweisen für den gleichen Sachverhalt:

$$(1,2) \quad \text{oder} \quad \boxed{\begin{array}{ll} 1 & \\ & 2 \end{array}} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie, was immer Ihnen zusagt, aber machen Sie stets klar, welche Schreibweise Sie gerade verwenden.

Bitte stellen Sie die folgenden Probleme als Spiele in Bi-Matrix-Form dar. Geben Sie zu jedem Spiel mindestens eine Kombination von reinen Strategien an.

Beispiel 3.1. (Battle of the Sexes) Eva und Maria wollen sich im Restaurant treffen. Allerdings zieht Eva es vor, sich im ersten Restaurant zu treffen während Maria das zweite Restaurant vorzieht.

Beide haben eine Auszahlung von 0 wenn sie sich verpassen. Wenn sie sich treffen, erhält diejenige die in ihrem bevorzugten Restaurant sitzt, eine Auszahlung von 2, die andere nur von 1.

Beispiel 3.2. (Chicken) Maria kommt mit der Bahn aus Weimar und möchte gerne in Jena-West aussteigen. Als der Zug anhält, steht vor dem Wagen Eva, die gerne einsteigen möchte. Wenn beide versuchen, ihr Ziel mit Gewalt durchzusetzen, kommt es zu einer Keilerei und beide haben eine Auszahlung von -10. Wenn eine von beiden nachgibt, kommt die andere schneller zum Ziel und erhält eine Auszahlung von 5. Diejenige die wartet erhält eine Auszahlung von 3. Wenn beide höflich sind und warten kommen sie nicht recht voran und erhalten beide eine Auzahlung von 0.

3.3 Übungen

Übung 3.1. Betrachten Sie folgendes Spiel:

		Maria		
		c	d	e
Eva	A	1 4	0 0	3 5
	B	6 2	1 8	4 2

1. Wieviel Strategien hat Maria? Wieviel Strategien hat Eva?

2. Gesetzt den Fall, Maria spielt d und Eva spielt B. Welche Auszahlung erhält Eva? Welche Auszahlung erhält Maria?

3. Gesetzt den Fall, Eva spielt A und Maria spielt e. Welche Auszahlung erhält Maria? Welche Auszahlung erhält Eva?

Übung 3.2. Eva und Maria wollen jeweils einen Bratwurststand eröffnen. Zur Wahl stehen zwei Plätze, der Ernst-Abbe Platz und der Carl-Zeiss Platz.

Evas Bratwürste sind besser, so dass Maria pleite machen wird (Auszahlung von 0), falls sie ihren Stand an der gleichen Stelle eröffnet wie Eva. Wenn sie eine andere Stelle als Eva wählt, kann sie ihre Bratwürste verkaufen (Auszahlung von 1).

Eva kommt es gar nicht auf ihren Gewinn an, sondern nur darauf, Maria aus dem Markt zu vertreiben. Wenn ihr das gelingt, hat sie eine Auszahlung von 2, bleibt Maria im Markt, ärgert sich Eva über die unprofessionell hergestellten Bratwürste und hat eine Auszahlung von −2.

Stellen Sie das Spiel in Normalform dar.

Das Eidechsenspiel: In diesem Beispiel lernen Sie eine Anwendung der Spieltheorie auf ein Problem der Biologie kennen:

Wir können drei verschiedene männliche Spezies der Eidechsenart uta stansburiana unterscheiden. Männchen mit orangem Hals, Männchen mit blauem Hals, und Männchen mit gelbem Hals.

- Die Männchen mit orangem Hals sind sehr aggressiv und haben viele Weibchen.
- Die Männchen mit blauem Hals sind mäßig aggressiv und haben nur wenige Weibchen.
- Die Männchen mit gelbem Hals sind gar nicht aggressiv und sehen genau so aus wie sexuell aktive Weibchen, so dass sie in das Territorium der anderen beiden Typen eindringen können um sich mit den dort vorhandenen Weibchen fortzupflanzen.
- Wenn zwei Männchen von gleichem Typ aufeinandertreffen, ist der reproduktive Erfolg neutral. Wir nennen die Auszahlung 0.

- Wenn ein Männchen mit orangem Hals auf eines mit blauem Hals trifft pflanzt sich das Männchen mit orangem Hals mit den Weibchen des zweiten fort. Wir sagen, der reproduktive Erfolg des Männchens mit orangem Hals ist die Auszahlung 1, des zweiten ist die Auszahlung −1.
- Männchen mit orangem Hals haben sehr viele Weibchen und merken deshalb nicht, wenn ein anderes Männchen mit gelbem Hals in ihr Territorium eindringt (sie halten es für eines ihrer Weibchen und sind zu beschäftigt, diese Hypothese genau zu überprüfen). Mithin kann sich das Männchen mit gelbem Hals, das auf eines mit orangem Hals trifft, unbemerkt fortpflanzen. Der reproduktive Erfolg des Männchens mit orangem Hals ist die Auszahlung −1, der des Männchens mit gelbem Hals die Auszahlung 1.

- Männchen mit blauem Hals haben nur wenige Weibchen und wenn sie auf ein anderes Männchen mit mit gelbem Hals treffen, erkennen sie es bald als fremdes Männchen und verjagen es. Hier ist der reproduktive Erfolg des Männchens mit blauem Hals die Auszahlung 1 und des Männchens mit gelbem Hals die Auszahlung -1.

Übung 3.3. Betrachten Sie das Spiel in der (durch die Natur) gleichzeitig zwei Typen von Männchen gewählt werden. Interpretieren Sie dies als Wahl von Strategien und beschreiben Sie das Spiel in Normalform als 2-Personenspiel. (Weitere Information zum Hintergrund 1, 2)

Übung 3.4. (Gefangenendilemma) Eva und Maria haben eine Bank überfallen. Luise ist Sheriff und hat sie gefasst, kann ihnen das Verbrechen aber nicht nachweisen. Was sie nachweisen kann, ist ein minder schweres Verbrechen (unerlaubter Waffenbesitz). Sie sitzen in getrennten Zellen und bekommen unabhängig voneinander von Luise den folgenden Vorschlag:

- Wenn ihr beide schweigt, werdet ihr nur wegen unerlaubtem Waffenbesitz verurteilt (Auszahlung von -5 für beide.).
- Wenn aber eine von euch gesteht, so wird sie Kronzeugin und auf freien Fuß gesetzt (Auszahlung von 0), die andere bekommt eine lange Gefängnisstrafe (Auszahlung von -20).
- Wenn ihr beide gesteht, könnt ihr zwar nicht beide Kronzeugin sein, erhaltet aber eine milde Strafe (Auszahlung von -10).

Beschreiben Sie das Spiel in Normalform als 2-Personenspiel zwischen Eva und Maria.

3.4 gemischte Strategien

3.4.1 Motivation

Welche reine Strategie sollten wir in Stein-Schere-Papier einem Spieler empfehlen? (Nehmen Sie an, die Empfehlung würde öffentlich in einem Spieltheoriebuch ausgesprochen):

- Spiele stets „Stein“?
- Spiele stets „Schere“?
- Spiele stets „Papier“?

3.4.2 Gemischte Strategien eines Spielers

Es mag sein, dass ein Spieler nicht eine bestimmte reine Strategie mit Sicherheit wählt, sondern unter mehreren reinen Strategien eine bestimmte zufällige Auswahl trifft. Wir sprechen dann von einer gemischten Strategie.

Definition 6 (gemischte Strategie)**.** Eine gemischte Strategie $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ eines Spielers $i \in \mathbb{I}$ ordnet jeder reinen Strategie $s_i^k \in S_i$ eine Wahrscheinlichkeit $\sigma_i(s_i^k)$ zu.

Dabei gilt

$$0 \leq \sigma_i(s_i^k) \leq 1 \qquad \forall s_i^k \in S_i$$

und

$$\sum_{s_i^k \in S_i} \sigma_i(s_i^k) = 1$$

Beispiel 3.3. Eine gemischte Strategie bei Stein-Schere-Papier wäre für Spieler 1 z.B.

$$\sigma_1 = \{\sigma(\text{Schere}), \sigma(\text{Stein}), \sigma(\text{Papier})\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

Bei dieser Strategie spielt Spieler 1 alle reinen Strategien mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

Anmerkung (reine Strategien): reine Strategien können als Spezialfall von gemischte Strategien aufgefasst werden. Eine reine Strategie hat die Wahrscheinlichkeit 1, und alle anderen reinen Strategien dieses Spielers die Wahrscheinlichkeit 0.

Beispiel 3.4. Eine reine Strategie bei Stein-Schere-Papier wäre für Spieler 1 z.B.

$$\sigma_1 = \{\sigma(\text{Schere}), \sigma(\text{Stein}), \sigma(\text{Papier})\} = \{0, 1, 0\}$$

Bei dieser Strategie spielt Spieler 1 stets Stein.

3.4.3 Menge aller gemischten Strategien eines Spielers

Definition 7 (Menge der gemischten Strategien)**.** Die Menge der gemischten Strategien eines Spielers $i \in \mathbb{I}$ nennen wir Σ_i. Sie enthält alle gemischten Strategien dieses Spielers.

Beispiel 3.5. Bei Stein-Schere-Papier enthält die Menge der gemischten Strategien von Spieler 1 z.B. die folgenden Elemente:

$$\{\sigma(\text{Schere}), \sigma(\text{Stein}), \sigma(\text{Papier})\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\} \in \Sigma_1$$

$$\{\sigma(\text{Schere}), \sigma(\text{Stein}), \sigma(\text{Papier})\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\} \in \Sigma_1$$

$$\{\sigma(\text{Schere}), \sigma(\text{Stein}), \sigma(\text{Papier})\} = \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} \in \Sigma_1$$

$$\{\sigma(\text{Schere}), \sigma(\text{Stein}), \sigma(\text{Papier})\} = \{0, 0, 1\} \in \Sigma_1$$

3.4.4 Definition Kombination (gemischter) Strategien

Definition 8 (Kombination von gemischten Strategien)**.** Eine Kombination von gemischten Strategien $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ gibt für <u>jeden</u> Spieler $i \in \{1, \ldots, n\}$ an, welche gemischte Strategie er spielt.

Beispiel 3.6.

$$\begin{aligned} \sigma &= \left\{\{\sigma(\text{Schere}), \sigma(\text{Stein}), \sigma(\text{Papier})\}, \{\sigma(\text{Schere}'), \sigma(\text{Stein}'), \sigma(\text{Papier}')\}\right\} \\ &= \left\{\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}, \{1, 0, 0\}\right\} \end{aligned}$$

ist bei Stein-Schere-Papier eine mögliche Kombination von gemischten Strategien.

Wir nennen die Menge aller möglichen Kombinationen von gemischten Strategien Σ.

$$\Sigma = \prod_{i \in \mathbb{I}} \Sigma_i$$

3.4.5 Definition unvollständige Kombination gemischter Strategien

Genauso wie wir oben eine unvollständige Kombination von reinen Strategien definiert haben, können wir nun eine unvollständige Kombination von gemischten Strategien definieren.

Definition 9. Sei $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ eine Kombination von gemischten Strategien für ein Spiel. Dann gibt $\sigma_{-i} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n\}$ für alle Spieler außer Spieler i an, welche gemischte Strategie sie spielen.

Beachten Sie die Schreibweise σ_{-i}.

Wir nennen die Menge der unvollständigen Kombination von gemischten Strategien Σ_{-i}.

$$\Sigma_{-i} = \prod_{j \neq i} \Sigma_j$$

3.4.6 Auszahlungsfunktion bei gemischten Strategien

- Wir wollen nun aus den Auszahlungsfunktionen für reine Strategien auch Auszahlungsfunktionen für gemischte Strategien herleiten.
- Zunächst interessieren wir uns dafür, wie wahrscheinlich eine Auszahlung einer Kombination von reinen Strategien zustande kommt.
- Verwenden in einem Spiel in Normalform $G = \{\mathbb{I}, S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$ die Spieler die Kombination von gemischten Strategien $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, dann wird jede Kombination von reinen Strategien $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\prod_{i \in \mathbb{I}} \sigma_i(s_i)$ gespielt.
- Die Erwartungsauszahlung für Spieler i ist mithin

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} u_i(s) \cdot \prod_{i \in \mathbb{I}} \sigma_i(s_i)$$

3.4.7 Beispiel zur Auszahlungsfunktion bei gemischten Strategien

Zur Erinnerung: Wir beschreiben das Spiel Stein-Schere-Papier wie folgt:

		Spieler 2		
		Stein′	Schere′	Papier′
Spieler 1	Stein	0, 0	1, -1	-1, 1
	Schere	-1, 1	0, 0	1, -1
	Papier	1, -1	-1, 1	0, 0

Beispiel 3.7. Nehmen wir an, dass in Stein-Schere-Papier Spieler 1 die folgende gemischte Strategie hat:

$$\sigma_1(\text{Stein}) = \frac{1}{3} \qquad \sigma_1(\text{Schere}) = 0 \qquad \sigma_1(\text{Papier}) = \frac{2}{3}$$

(Spieler 1 wird also niemals „Schere“ spielen).

Nehmen wir ferner an, Spieler 2 habe die folgende gemischte: Strategie

$$\sigma_2(\text{Stein}') = \frac{1}{2} \qquad \sigma_2(\text{Schere}') = \frac{1}{4} \qquad \sigma_2(\text{Papier}') = \frac{1}{4}$$

Die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen reinen Strategie schreiben wir einstweilen vor bzw. über die Strategien:

Beispiel 3.8.

			Spieler 2		
			$\frac{1}{2}$ Stein′	$\frac{1}{4}$ Schere′	$\frac{1}{4}$ Papier′
Spieler 1	$\frac{1}{3}$	Stein	$\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$
	0	Schere	$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$
	$\frac{2}{3}$	Papier	$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

Beide Spieler randomisieren unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeit eines gemeinsamen Events ist also das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeiten der Kombinationen von reinen Strategien schreiben wir vor die Auszahlungen:

Beispiel 3.9.

			Spieler 2		
			$\frac{1}{2}$ Stein′	$\frac{1}{4}$ Schere′	$\frac{1}{4}$ Papier′
Spieler 1	$\frac{1}{3}$	Stein	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$	$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$	$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$
	0	Schere	$0\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$	$0\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$	$0\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$
	$\frac{2}{3}$	Papier	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

Die Erwartungsauszahlung ist mithin

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1/6 \\ 1/6 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.10. Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Maria	
		d	e
Eva	A	$\begin{matrix} & 1 \\ 4 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 0 \\ 0 & \end{matrix}$
	B	$\begin{matrix} & 6 \\ 2 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 1 \\ 8 & \end{matrix}$
	C	$\begin{matrix} & 0 \\ 0 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 2 \\ 2 & \end{matrix}$

Nehmen Sie an, dass Maria die Strategien d und e jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ wählt. Bestimmen Sie die Erwartungsauszahlungen für jede der drei reinen Strategien von Eva.

Welche reine Strategie gibt Eva in diesem Fall die höchste Erwartungsauszahlung?

Beispiel 3.11. Nehmen Sie nun an, dass Maria stets ihre reine Strategie d wählt. Was sind nun die Erwartungsauszahlungen jeder der drei reinen Strategien von Eva?

Welche Strategie gibt Eva in diesem Fall nun die höchste Erwartungsauszahlung?

3.4.8 Anmerkung zur Auszahlungsfunktion bei gemischten Strategien

Einfach die Erwartungsauszahlung einer Lotterie zu berechnen, und zu behaupten, dies sei die Auszahlung, die ein Spieler dieser Lotterie beimisst, ist problematisch.

Wenn die zugrundeliegenden Auszahlungen Geld sind, klappt das in der Praxis fast nie.

Beispiel 3.12. Was ist Ihnen lieber

- Eine sichere Auszahlung von 0 €

- Eine Lotterie bei der Sie mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ den Betrag von 1000 € verlieren, und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ den Betrag von 1000 € gewinnen.

Was ist die Erwartungsauzahlung der Lotterie?

$$\frac{1}{2} \cdot 1000€ + \frac{1}{2} \cdot (-1000\ €) = 0\ €$$

Die Erwartungsauszahlungen der beiden Alternativen sind gleich (jeweils 0 €). Viele Leute ziehen die sichere Auszahlung von 0 € einer Lotterie mit Erwartungsauszahlung von 0 € vor.

Das heißt, sie sind risikoavers.

Erwartungsauszahlungen einer Lotterie können aber anstatt von Geld auch von einem hypothetischen Konzept, das wir „Nutzen" nennen, ausgehen. Man könnte sich eine Person vorstellen, deren Verhalten durch die folgende Nutzenfunktion beschrieben werden kann:

Geld x	-1000 €	0 €	1000 €
Nutzen $u(x)$	-10	2	6

Beispiel 3.13.

Was ist jetzt der Erwartungsnutzen der beiden Lotterien:

- Eine sichere Auszahlung von 0 € hat einen Nutzen von $u = 2$.
- Die Lotterie bei der mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ der Betrag von 1000 € gewonnen, und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ der Betrag von 1000 € verloren wird, hat einen Erwartungsnutzen von $u = \frac{1}{2} \cdot (-10) + \frac{1}{2} \cdot 6 = -2$.

Eine Person, die Erwartungsnutzen maximiert, wird die sichere Auszahlung von 0 vorziehen.

Wenn wir annehmen, dass Entscheider Erwartungsnutzen maximieren (und nicht die Erwartungsauszahlung) können wir also z.B. risikoaverses Verhalten berücksichtigen.

Aber auch die Interpretation die annimmt, dass Spieler ihren Erwartungsnutzen (und nicht eine erwartete Auszahlung in Geld) maximieren, ist oft keine gute Beschreibung des Verhaltens von Menschen. Betrachten Sie die folgenden vier Lotterien:

	Wahrscheinlichkeit	Preis
A	0.25	3000 €
B	0.2	4000 €

	Wahrscheinlichkeit	Preis
A'	1	3000 €
B'	0.8	4000 €

Vor die Wahl zwischen Lotterie A und B gestellt, entscheiden sich viele Menschen für B.

Vor die Wahl zwischen Lotterie A' und B' gestellt, entscheiden sich viele Menschen für A'.

Beispiel 3.14. Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, den beiden Preisen (3000 € und 4000 €) Nutzenwerte zuzuordnen, so dass diese Präferenzen durch Maximieren von Erwartungsnutzen erklärt werden können.

3.4.9 Fazit zur Anmerkung

Spieltheorie ignoriert dieses Problem und macht typischerweise die folgende Annahme:

- Das Verhalten von Spielern kann beschrieben werden als Ergebnis von Erwartungsnutzenmaximierung (alternativ kann man annehmen, dass das Verhalten den Axiomen von von Neumann und Morgenstern genügt)

Dieser Nutzen ist es, den wir hier als „Auszahlung“ bezeichnen.

Beachten Sie bitte den subtilen Unterschied zwischen den folgenden Formulierungen:

- ein Spieler maximiert (bewusst) Erwartungsnutzen, und
- wir können das Verhalten eines Spielers (einer Pflanze, eines Lebewesens) beschreiben, indem wir eine Nutzenfunktion finden, mit der eine Maximierung des Erwartungsnutzens zu diesem Verhalten führen würde.

Die zweite Formulierung ist vorsichtiger. Wir werden ihr im folgenden den Vorzug geben.

Übung 3.5. Eine Person, deren Verhalten stets durch eine von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion beschrieben werden kann, habe die Präferenzen $\mathcal{L} \prec \mathcal{D}_1 \prec \mathcal{D}_2 \prec \mathcal{W}$. Die Preise $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ sind äquivalent zu den folgenden Lotterien:

$\mathcal{D}_1 \sim$

Preise:	$\mathcal{L}$	$\mathcal{W}$
Wahrscheinlichkeit:	0.6	0.4

$\mathcal{D}_2 \sim$

Preise:	$\mathcal{L}$	$\mathcal{W}$
Wahrscheinlichkeit:	0.2	0.8

Welche der beiden folgenden Lotterien L und M wird diese Person vorziehen:

$L \sim$

Preise:	$\mathcal{L}$	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{W}$
Wahrscheinlichkeit:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$M \sim$

Preise:	$\mathcal{L}$	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{W}$
Wahrscheinlichkeit:	0.2	0.15	0.5	0.15

(aus [1, 3.7.9])

Übung 3.6. Eva befürchtet, dass Maria aus der gemeinsamen Wohnung ausziehen könnte. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis liegt bei 1/3. Eva ist indifferent zwischen dieser Lotterie und der folgenden Alternative: Eva macht 100 mal den Abwasch und trägt den Müll weg und Maria bleibt mit Sicherheit.

Nehmen Sie an, dass die Entscheidungen von Eva durch eine von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion beschrieben werden können.

1. Zeigen Sie, dass Eva auch indifferent ist zwischen den folgenden zwei Ereignissen:
   - Maria zieht mit Wahrscheinlichkeit 2/3 aus.
   - Maria zieht mit Wahrscheinlichkeit 1/2 aus und Eva macht 100 mal den Abwasch und trägt den Müll weg.
2. Welches der beiden folgenden Ereignisse zieht Eva vor:
   - Maria zieht mit Wahrscheinlichkeit 1/6 aus.
   - Maria bleibt mit Sicherheit und Eva macht 100 mal den Abwasch und trägt den Müll weg.

Übung 3.7. Betrachten Sie die folgenden drei Lotterien:

	Wahrscheinlichkeit		
	1/3	1/3	1/3
$\mathcal{L}_1$	2	4	9
$\mathcal{L}_2$	1	6	8
$\mathcal{L}_3$	3	5	7

Zunächst wählt Eva eine Lotterie, dann Maria. Diejenige, die eine höhere Zahl zieht, gewinnt einen Preis, die andere verliert. Nehmen Sie an, Eva und Maria seien nur in den Erwartungsauszahlungen dieses Spiels interessiert. Welche Lotterie wird Eva wählen. Was ist die Erwartungsauszahlung dieses Spiels für Eva? Welche Lotterie wird Maria wählen?

3.4.10 Die Axiome von Neumann and Morgenstern (1944)

Wir bezeichnen einen Spaltenvektor möglicher Outcomes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ einer Lotterie mit $\vec{x}$. Wir bezeichnen einen Spaltenvektor von Wahrscheinlichkeiten über diese Outcomes $(p_1, p_2, \ldots, p_n)'$ mit $\vec{p}$. Die Lotterie nennen wir $\vec{p}\,'\vec{x}$.

Definition 10 (Nutzenfunktion)**.** Eine Nutzenfunktion $u(x_i)$ beschreibt eine Präferenzrelation $\succ$ wenn $\vec{p}\,'\vec{x} \succ \vec{q}\,'\vec{x} \Leftrightarrow \sum_i p_i u(x_i) > \sum_i q_i u(x_i)$.

Wann existiert eine solche Nutzenfunktion? Die drei Axiome von von Neumann und Morgenstern:

1. Ordnung: Präferenzen sind vollständig (entweder $X \prec Y$ oder $Y \prec X$ oder $X \sim Y$) und transitiv ($X \succ Y \wedge Y \succ Z \to X \succ Z$).
2. Stetigkeit: $\forall X \succ Y \succ Z \quad \exists p : pX + (1-p)Z \sim Y$
3. Unabhängigkeit: $\forall X \succ Y, p \in (0,1) : \forall Z : pX + (1-p)Z \succ pY + (1-p)Z$

Satz 1. *Wenn alle drei Axiome erfüllt sind, dann existiert eine Nutzenfunktion $u(x_i)$ die die Präferenzrelation $\succ$ beschreibt, d.h. dass $\vec{p}\,'\vec{x} \succ \vec{q}\,'\vec{x}$ genau dann, wenn $\sum_i p_i u(x_i) > \sum_i q_i u(x_i)$.*

Satz 2. *Wenn $u(x_i)$ die Präferenzrelation $\succ$ beschreibt, dann beschreibt auch $v(x_i) = a \cdot u(x_i) + b$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ die Präferenzrelation $\succ$.*

Beispiel 3.15. Beweisen Sie diesen Satz.

Übung 3.8. Marias Nutzenfunktion ist $u(x) = 4\sqrt{x}$ wenn x die Auszahlung in Geld ist. Die Lotterie M gibt ihr mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ eine Auszahlung von 16 und mit Wahrscheinlichkeit $4/5$ eine Auszahlung von 1.

1. Was ist der Erwartungsnutzen?
2. Was ist die Erwartungsauszahlung?
3. Wenn Maria wählen kann zwischen der Lotterie M und einer sicheren Auszahlung von 4, wie wird sie sich entscheiden?
4. Ist Maria eher risikofreudig oder eher risikoavers?

4 Lösungskonzepte für Spiele in Normalform

4.1 Eliminieren dominierter Strategien

4.1.1 Dominierte Strategien

Definition 11 (Dominanz)**.** Lösungskonzepte Sei $G = \{\mathbb{I}, S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$ ein Normalformspiel und $\sigma_i' \in \Sigma_i$ und $\sigma_i'' \in \Sigma_i$ zwei gemischte Strategien von Spieler i.

Die gemischte Strategie σ_i' dominiert σ_i'' strikt wenn gilt

$$\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} : u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i'', \sigma_{-i})$$

Die gemischte Strategie σ_i' dominiert σ_i'' schwach wenn gilt

$$\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} : u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i'', \sigma_{-i})$$

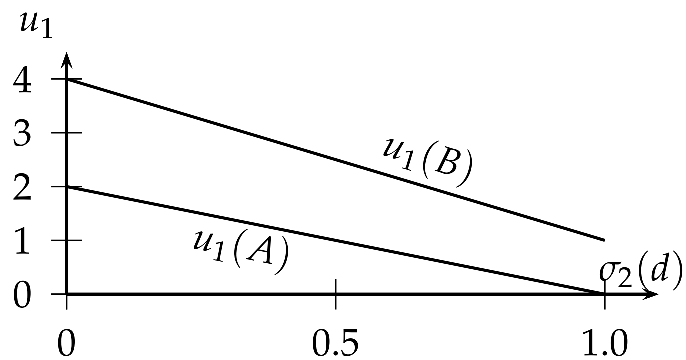
In anderen Worten: Egal was die anderen Spieler machen, es ist für Spieler i immer besser σ_i' zu wählen als σ_i''.

Anmerkung: Falls Sie nicht mehr genau wissen, was die Notation Σ_{-i} bedeutet, schauen Sie bitte unter unvollständiger Kombination von gemischten Strategien nach.

Beispiel 4.1.

		Spieler 2	
		c	d
Spieler 1	A	2, 3	0, 4
	B	4, 2	1, 1

Hier dominiert für Spieler 1 die reine Strategie B strikt die reine Strategie A. Egal was Spieler 2 macht, es ist für Spieler 1 stets besser B zu wählen.



Es reicht a priori nicht, diesen Zusammenhang nur für reine Strategien zu überprüfen. Dominanz muss auch für alle unvollständigen Kombination von gemischten Strategien gelten (Satz 4, den wir weiter unten betrachten, vereinfacht das Problem allerdings).

Das folgende Spiel ist etwas kniffliger:

Beispiel 4.2.

		Maria: d	Maria: e
Eva	A	3, 3	0, 4
	B	6, 2	-1, 1
	C	2, 3	3, 1

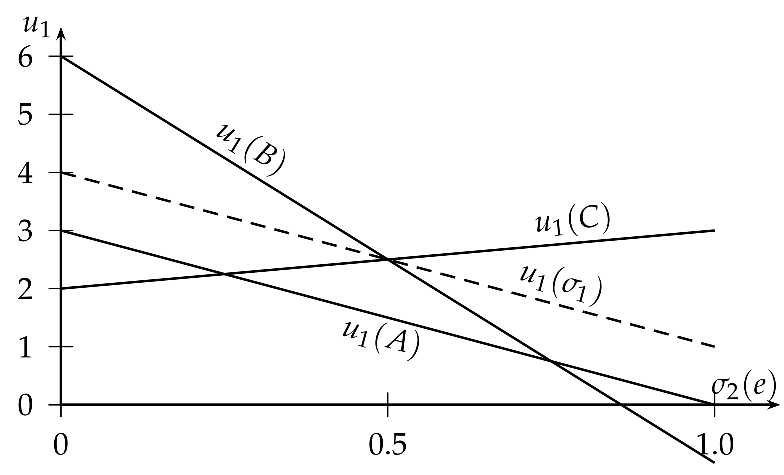
Betrachte die gemischte Strategie σ_1 :

$$\sigma_1(A) = 0, \quad \sigma_1(B) = \frac{1}{2}, \quad \sigma_1(C) = \frac{1}{2}$$

d.h. Spieler 1 mischt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ über seine reinen Strategien B und C.

Gesetzt den Fall, Spieler 2 spielt d, so ist es für Spieler 1 besser σ_1 zu spielen als A zu spielen. Gesetzt den Fall, Spieler 2 spielt e, so ist es für Spieler 1 immer noch besser σ_1 zu spielen als A zu spielen. Man kann leicht zeigen, dass es dann bei jeder gemischten Strategie von 2 besser ist σ_1 zu spielen.

		Maria: d	Maria: e
Eva	A	3, 3	0, 4
	B	6, 2	-1, 1
	C	2, 3	3, 1



Satz 3. *Wenn für alle unvollständigen Kombinationen von reinen Strategien $s_{-i} \in S_{-i}$*

gilt $u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(\sigma_i'', s_{-i})$, *dann folgt auch*

$$\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} : u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i'', \sigma_{-i})$$

d.h. σ_i' *dominiert* σ_i'' *strikt.*

Beispiel 4.3. Beweisen Sie diesen Satz.

Satz 4. *Wenn die reine Strategie* s_i'' *strikt dominiert wird, dann sind auch alle gemischten Strategien, in denen* s_i'' *mit einer positiven Wahrscheinlichkeit gespielt wird, ebenfalls strikt dominiert.*

Beispiel 4.4. Beweisen Sie diesen Satz.

4.1.2 Anwendung von iteriertem Eliminieren dominierter Strategien

In Satz 4 im vergangenen Abschnitt haben Sie gelernt, dass wenn eine reine Strategie dominiert ist, dass dann auch alle gemischten Strategien dominiert sind, in denen diese reine Strategie mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt wird.

Wir nehmen an, dass alle Spieler ihre Erwartungsauszahlung maximieren. Also wird kein Spieler eine dominierte Strategie spielen. Deshalb können wir dominierte Strategien weglassen. Dadurch vereinfacht sich die Analyse des Spiels. Betrachten wir nochmal das obige Beispiel.

		Spieler 2	
		d	e
Spieler 1	A	3, 3	0, 4
	B	6, 2	−1, 1
	C	2, 3	3, 1

Wir haben gesehen, dass Strategie A dominiert wird durch eine Mischung von B und C. Wir können also ein vereinfachtes Spiel betrachten:

		Spieler 2	
		d	e
Spieler 1	B	6, 2	−1, 1
	C	2, 3	3, 1

In diesem Spiel ist nur Strategie e von Spieler 2 dominiert durch Strategie d. Wir können also weiter vereinfachen:

Spieler 2

Spieler 1		d
	B	2 6
	C	3 2

Nun ist Strategie C von Spieler 1 dominiert durch B.

Spieler 2

Spieler 1		d
	B	2 6

Durch wiederholtes Elimieren dominierter Strategien haben wir die Kombination von reinen Strategien $\{B, d\}$ erhalten.

Wenn beide Spieler ihre Erwartungsauszahlung maximieren, und beide dies auch wissen, und beide wissen, dass beide das wissen, werden also beide Spieler sofort die Kombination von reinen Strategien $\{B, d\}$ wählen.

Übung 4.1. Vereinfachen Sie das folgende Spiel durch Elimination strikt dominierter Strategien.

Spieler 2

Spieler 1		d	e	f
	A	0 2	1 1	2 4
	B	3 3	2 1	4 2
	C	3 1	2 0	0 3

(aus [3, 1.5.1.2])

Übung 4.2. Vereinfachen Sie das folgende Spiel durch Elimination strikt dominierter Strategien.

		Spieler 2				
		f	*g*	*h*	*i*	*j*
	A	4 2	1 −1	3 0	5 0	3 2
	B	5 2	0 4	4 3	3 1	2 0
Spieler 1	*C*	5 3	2 3	3 1	4 3	3 5
	D	−5 2	1 4	2 0	2 1	1 5
	E	−5 2	0 2	1 0	1 −1	0 2

Übung 4.3. Vereinfachen Sie das folgende Spiel durch Elimination strikt dominierter Strategien.

		Spieler 2				
		f	*g*	*h*	*i*	*j*
	A	3 5	2 4	4 5	2 3	3 1
	B	8 6	5 8	7 7	5 4	8 3
Spieler 1	*C*	4 5	3 5	5 1	4 4	6 2
	D	2 3	1 6	3 1	0 5	2 2
	E	0 1	0 2	1 3	0 4	2 3

4.1.3 Problem 1 mit wiederholter Elimination dominierter Strategien

Leider ist wiederholte Elimination strikt dominierter Strategien nicht immer so erfolgreich wie im obigen Beispiel.

Beispiel 4.5.

		Spieler 2	
		c	*d*
Spieler 1	*A*	1 1	0 0
	B	0 0	1 1

Hier lassen sich keine dominierten Strategien eliminieren.

Ein Konzept, das auch in diesem Spiel eine Auswahl unter den vielen möglichen Kombinationen gemischter Strategien macht, ist das Nash-Gleichgewicht das wir in Abschnitt 4.2 betrachten werden.

4.1.4 Problem 2 mit wiederholter Elimination dominierter Strategien

Ein weiteres Problem mit wiederholter Elimination strikt dominierter Strategien ist die hohe Anforderung an die Rationalität der Spieler. Erinnern Sie sich an das Guessing Game aus der Einführung? Durch elfmaliges Eliminieren (schwach) dominierter Strategien sind wir dort zu einer Lösung gekommen: Alle Spieler sollten „2“ spielen.

Wir haben gesehen, dass Spieler im wirklichen Leben sich nicht so verhalten.

Wir haben ferner gesehen, dass ein Spieler, der brav elfmal dominierte Strategien eliminieren würde, nicht gewinnen würde.

4.2 Nash Gleichgewicht

4.2.1 Beste Antwort

Definition 12 (beste Antwort)**.** Eine gemischte Strategie σ_i' eines Spielers $i \in \mathbb{I}$ ist eine beste Antwort auf σ_{-i} wenn

$$\forall_{\sigma_i'' \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i'', \sigma_{-i})$$

In Worten: Gegeben die anderen Spieler spielen σ_{-i} kann sich Spieler i nicht verbessern, wenn er etwas anderes (σ_i'') macht als σ_i'.

4.2.2 Definition Nash Gleichgewicht

Definition 13 (Nash Gleichgewicht)**.** Eine Kombination von gemischten Strategien σ ist ein Nash Gleichgewicht, wenn jeder Spieler eine beste Antwort spielt.

Formal also

$$\forall_{i \in \mathbb{I}} : u_i(\sigma) = \max_{\sigma_i' \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

Beachten Sie: Ist σ ein Nash Gleichgewicht, dann hat kein Spieler einen Anreiz von σ abzuweichen.

Beispiel 4.6.

		Maria	
		c	d
Eva	A	3 3	4 0
	B	0 4	1 1

4.2.3 Übungen

Wir beginnen mit einfachen Übungen. Finden Sie für die folgenden Spiele jeweils alle Kombinationen von reinen Strategien. Welche davon stellen ein Nash Gleichgewicht dar? (Beachten Sie, dass Sie mit dieser Methode keine Nash Gleichgewichte in gemischte Strategien finden.)

Übung 4.4.

		Maria	
		c	d
Eva	A	3 3	2 0
	B	5 2	6 3

Übung 4.5.

		Maria	
		c	d
Eva	A	3 2	2 3
	B	5 3	6 0

Übung 4.6. Betrachten Sie wieder die Spiele aus Übung 4.1 bis 4.3. Finden Sie nun alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien. (aus [3, 1.5.1.2])

Übung 4.7. Eva und Maria verhandeln darüber, wie sie einen Kuchen unter sich aufteilen. Sie sagen gleichzeitig, welchen Anteil des Kuchens (s_E bzw. s_M) sie jeweils haben wollen. Falls die Aufteilung „möglich" ist, d.h. die Summe der Anteile kleiner als der ganze Kuchen ist ($s_E + s_M \leq 1$) bekommt jede den geforderten Anteil. Ansonsten geht der Kuchen an Renate.

- Was ist eine Strategie in diesem Spiel?

- Was ist eine Kombination von reinen Strategien?
- Nehmen Sie an, dass sowohl Eva also auch Maria nur daran interessiert sind, möglichst viel Kuchen zu bekommen. Welche Kombinationen von reinen Strategien sind Nash Gleichgewichte dieses Spiels?

4.3 Rechenhilfe

Eine große Hilfe beim Bestimmen von Nash Gleichgewichten stellt der folgende Satz dar:

Satz 5. *Sei die Kombination von gemischten Strategien σ ein Nash Gleichgewicht des Spiels $G = \{\mathbb{I}, S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$. Keine reine Strategie, die unter σ mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt wird, wird bei wiederholter Elimination strikt dominierter Strategien eliminiert.*

Beispiel 4.7. Beweisen Sie diesen Satz.

Wir können also zunächst strikt dominierte reine Strategien elimieren und dadurch ein Spiel vereinfachen um leichter Nash Gleichgewichte berechnen zu können. Durch die Elimination strikt dominierter Strategien verlieren wir keine Gleichgewichte.

Anders sieht es aber beim Eliminieren schwach dominierter Strategien aus. Betrachten Sie das folgende Spiel:

Beispiel 4.8.

		Maria	
		c	d
Eva	A	$\begin{smallmatrix} & 3 \\ 3 & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & 3 \\ 6 & \end{smallmatrix}$
	B	$\begin{smallmatrix} & 4 \\ 5 & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & 0 \\ 2 & \end{smallmatrix}$

- Bestimmen Sie alle Kombinationen reiner Strategien in diesem Spiel.
- Welche davon sind Nash Gleichgewichte?
- Zeigen Sie, dass die reine Strategie d schwach dominiert ist und betrachten Sie das vereinfachte Spiel ohne diese Strategie.
- Zeigen Sie, dass im vereinfachten Spiel die Strategie A strikt dominiert ist und betrachten Sie das weiter vereinfachte Spiel.

- Welche Kombinationen reiner Strategien bleiben übrig?
- Welche Nash Gleichgewichte in reinen Strategien bleiben übrig? Welche haben Sie verloren?

Wir werden später auch auf das Bestimmen von Nash Gleichgewicht in gemischte Strategien eingehen.

4.4 Anwendungen

4.4.1 Cournot

Zwei Firmen produzieren ein homogenes Gut. Firma 1 produziert die Menge q_1, Firma 2 die Menge q_2. Die Kostenfuktion von Firma i ist $C_i(q_i) = c \cdot q_i$.

Die beiden Firmen wählen ihre Angebotsmengen q_1 und q_2 simultan.

Die Gesamtmenge nennen wir $Q = q_1 + q_2$.

Der Preis zu dem der Markt geräumt wird ist $p(Q) = a - Q$.

Spieltheoretische Beschreibung

Spieler: $\{1, 2\}$

reine Strategien: $q_1 \in \mathbb{R}$, $q_2 \in \mathbb{R}$

Auszahlungen $u_i(q_i, q_j) = q_i \cdot \big(p(q_i + q_j) - c\big) = q_i \cdot \big(a - (q_i + q_j) - c\big)$

Lösung:

zur Erinnerung: Eine Kombination von gemischten Strategien σ ist ein Nash Gleichgewicht, wenn

$$\forall_{i\in\mathbb{I}} : u_i(\sigma) = \max_{\sigma_i' \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

Wir betrachten hier Nash Gleichgewichte in reine Strategien.

Hier also: $\{q_i^*, q_j^*\}$ ist ein Nash Gleichgewicht wenn

$$\forall_{\{i,j\}\in\{\{1,2\},\{2,1\}\}} : u_i(q_i^*, q_j^*) = \max_{q_i} u_i(q_i, q_j^*) = \max_{q_i} q_i \left(a - (q_i + q_j^*) - c\right)$$

Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{du_i}{dq_i} = a - 2q_i^* - q_j^* - c = 0 \tag{1}$$

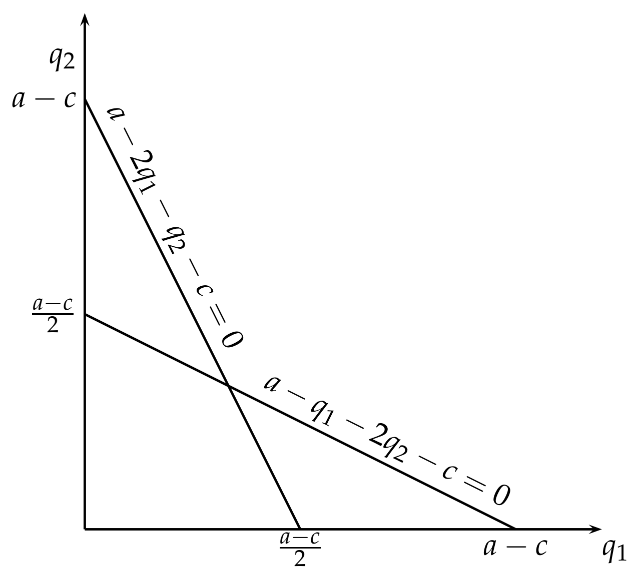
Bedingung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 u_i}{d{q_i}^2} = -2 < 0 \tag{2}$$

Wir rechnen also wirklich ein Gewinnmaximum und kein -minimum aus.

Bedingung (1) nennen wir manchmal auch „Reaktionsfunktion". Sie muss für beide Spieler gelten:

$$\begin{aligned} a - 2q_1 - q_2 - c &= 0 \qquad (3) \\ a - q_1 - 2q_2 - c &= 0 \qquad (4) \end{aligned}$$



Subtrahiere $(3) - 2 \cdot (4)$

$$-a + 3q_2 + c = 0 \tag{5}$$

Auflösen nach q_2:

$$\begin{aligned} 3q_2 &= a - c \qquad (6) \\ q_2 &= \frac{a-c}{3} \qquad (7) \end{aligned}$$

Genauso geht es für q_1, also

$$q_1 = \frac{a-c}{3} \tag{8}$$

Übung 4.8. Betrachten Sie nun den Fall von n Firmen im Cournot Modell. Die Firmen wählen simultan Angebotsmengen q_i. Die Gesamtmenge ist nun

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Kostenfunktion und Marktpreis seien wie im Duopol.

Übung 4.9. Betrachten Sie wieder den Fall von zwei Firmen im Cournot Modell. Im Gegensatz zum obigen Duopol Modell habe die erste Firma Grenzkosten c_1 und die zweite Firma Grenzkosten c_2.

- Bestimmen Sie das Nash Gleichgewicht für den Fall $0 < c_i < a/2$.
- Was passiert, wenn $c_1 < c_2 < a$ aber $2c_2 > a + c_1$?

4.4.2 Bertrand

Übung 4.10. Zwei Firmen produzieren ein differenziertes Gut zu Stückkosten von c. Fixkosten fallen nicht an.

Die beiden Firmen wählen ihre Angebotspreise p_1 und p_2 simultan.

Die Menge, die Firma i absetzen kann, ist $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$.

1. Beschreiben Sie das Spiel in Normalform.
2. Was sind die Nash Gleichgewichte des Spiels?

Übung 4.11. Betrachten Sie nun ein Bertrand Duopol mit einem homogenen Gut und vollkommener Konkurrenz. Die Absatzmenge von Firma i sei

$$q_i = \begin{cases} a - p_i & \text{falls } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(a - p_i) & \text{falls } p_i = p_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Was sind die Nash Gleichgewichte des Spiels?

4.4.3 Aufteilung mit Schlichtung

Beispiel 4.9. Eva und Maria teilen wieder einen Kuchen unter sich auf. Diesmal verwenden sie das folgende Verfahren: Beide schlagen simultan eine Aufteilung vor (beschrieben z.B. durch den Anteil s den Maria bekommt). Falls sie eine unterschiedliche Aufteilung gewählt haben, fragen sie Renate. Eva und Maria wissen, dass Renate eine bevorzugte Aufteilung $s = s_R$ hat. Sie wissen jedoch sehr wenig über s_R, d.h. für beide ist s_R eine Zufallszahl die gleichverteilt zwischen 0 und 1 liegt. Renate wird den Vorschlag wählen, der am nächsten an s_R liegt. An diesen Vorschlag müssen sich Eva und Maria dann halten.

1. Nehmen Sie an, dass sowohl Eva also auch Maria nur daran interessiert sind, selbst möglichst viel Kuchen zu bekommen. Welche Kombinationen von reinen Strategien sind Nash Gleichgewichte dieses Spiels?

2. Nehmen Sie nun an, dass Eva davon ausgeht, s_R sei nicht gleichverteilt, sondern hätte die Dichte $f(s_R) = 2s_R$. Maria geht nach wie vor von einem gleichverteilten s_R aus.

   Welche Kombinationen von reinen Strategien sind Nash Gleichgewichte dieses Spiels?

4.4.4 Das Problem der Gemeingüter

Übung 4.12. 1. Was sind öffentliche Güter? Nennen Sie deren Merkmale und geben Sie Beispiele.

2. Nehmen wir nun an, dass in einer Gruppe von 10 Personen ein öffentliches Gut bereitgestellt werden kann. Jede Person i hat folgende Auszahlungsfunktion: $G_i = 10 - c_i + \sum_i c_i/20$, wobei G_i der Gewinn, c_i der Beitrag der eigenen Person zum öffentlichen Gut und $\sum_i c_i$ die Summe aller Beiträge der 10 Personen zum öffentlichen Gut ist. Wie viel wird jede Person zum öffentlichen Gut beitragen, wenn sie ihren Gewinn maximieren will?

3. Nehmen wir nun an, dass die Gewinnfunktion $G_i = 10 - c_i + \sum c_i/2$ lautet. Wie verhalten sich gewinnmaximierende Personen nun? Welches Verhalten wäre für die gesamte Gruppe optimal?

4. Können Sie sich Möglichkeiten vorstellen, mit denen man Leute dazu bringen kann, zu einem öffentlichen Gut beizutragen?

Beispiel 4.10. In einem Dorf gibt es n Bauern. Jeder Bauer i kauft zu Beginn des Jahres g_i Ziegen zum Preis von c. Insgesamt werden $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$ Ziegen gekauft. Am Ende des Jahres werden die Ziegen verkauft. Inzwischen grasen die Ziegen auf der Dorfweide und nehmen an Gewicht zu. Je mehr Ziegen auf der Weide sind, um so geringer ist allerdings das erzielte Gewicht pro Ziege und mithin der Verkaufserlös v. Formal gilt $v'(G) < 0$ und $v''(G) < 0$.

1. Beschreiben Sie das Spiel in Normalform.
2. Finden Sie die Bedingungen für das Nash Gleichgewicht des Spiels.
3. Finden Sie die Bedingungen für die Maximierung des Gesamtgewinns.

Zeigen Sie, dass im Nash Gleichgewicht mehr Ziegen gekauft werden als bei Maximierung des Gesamtgewinns. (aus [3])

4.5 Gemischte Gleichgewichte

Bislang haben wir uns auf reine Strategien beschränkt. Das ist nicht immer ausreichend, wie das folgende Spiel zeigt (Matching Pennies):

Beispiel 4.11.

		Spieler 2: Kopf'	Spieler 2: Zahl'
Spieler 1	Kopf	-1, 1	1, -1
	Zahl	1, -1	-1, 1

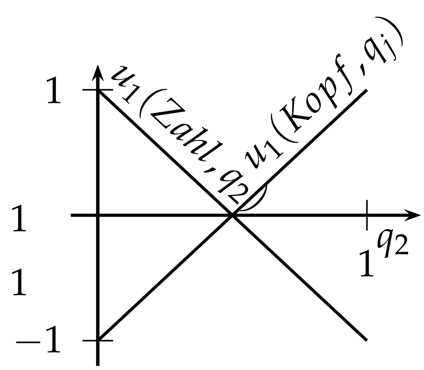
In reinen Strategie finden wir kein Nash Gleichgewicht. Egal welche Kombination von reinen Strategien wir betrachten, ein Spieler kann sich durch Abweichen immer verbessern. Aber es gibt eines in gemischten Strategien.

Was ist die beste Antwort von Spieler 1, gegeben eine gemischte Strategie von Spieler 2?

Nehmen wir an, Spieler 2 spielt Zahl' mit Wahrscheinlichkeit q_2 und Kopf' mit Wahrscheinlichkeit $1 - q_2$.

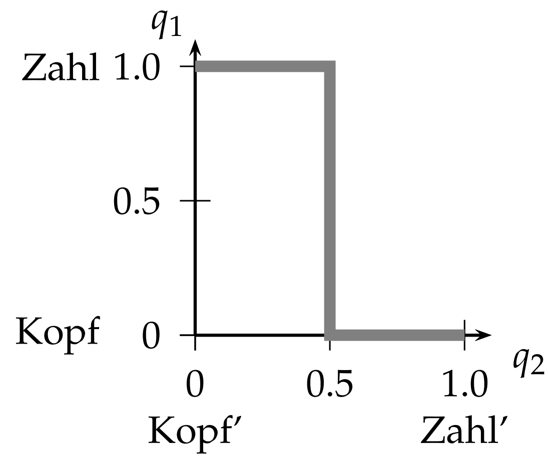
Dann ist die Auszahlung von Spieler 1

$$\begin{aligned} u_1(Kopf, q_2) &= -(1-q_2) + q_2 &= +2q_2 - 1 \\ u_1(Zahl, q_2) &= +(1-q_2) - q_2 &= -2q_2 + 1 \end{aligned}$$



Die Beste-Antwort-Korrespondenz von Spieler 1 ist also

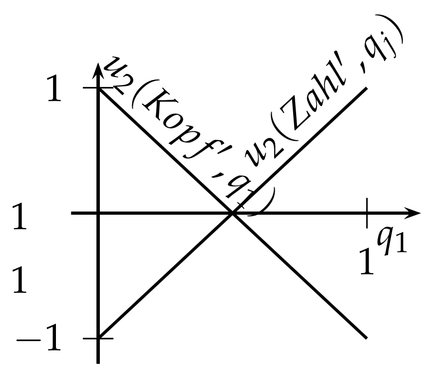
$$\sigma_1 = \begin{cases} \text{immer Zahl} & \text{falls } q_2 < \frac{1}{2} \\ \text{jede Mischung von Zahlund Kopf} & \text{falls } q_2 = \frac{1}{2} \\ \text{immer Kopf} & \text{falls } q_2 > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Nehmen wir an, Spieler 1 spielt Zahl mit Wahrscheinlichkeit q_1 und Kopf mit Wahrscheinlichkeit $1 - q_1$.

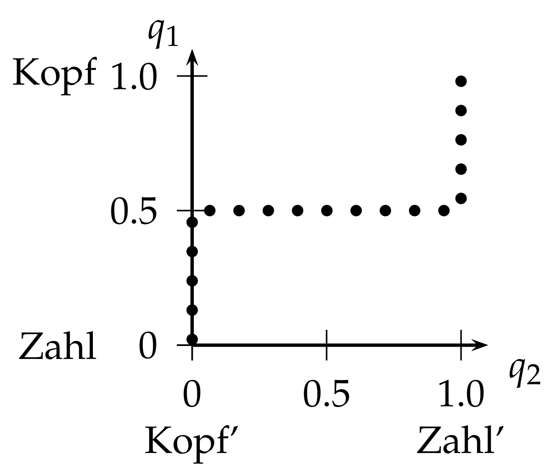
Dann ist die Auszahlung von Spieler 2

$$\begin{aligned} u_2(Zahl', q_1) &= -(1-q_1) + q_1 &= +2q_1 - 1 \\ u_2(Kopf', q_1) &= +(1-q_1) - q_1 &= -2q_1 + 1 \end{aligned}$$

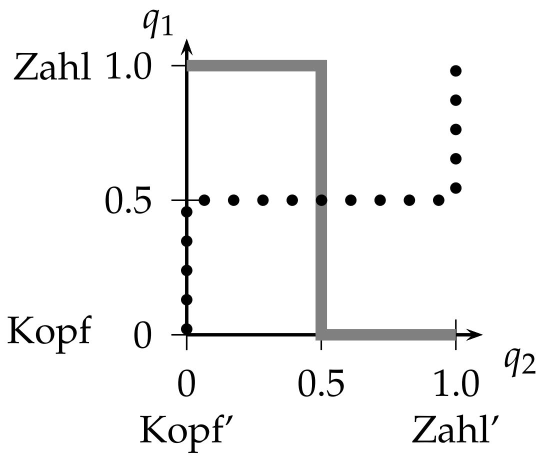


Die Beste-Antwort-Korrespondenz von Spieler 2 ist also

$$\sigma_1 = \begin{cases} \text{immer Kopf'} & \text{falls } q_1 < \frac{1}{2} \\ \text{jede Mischung von Kopf'und Zahl'} & \text{falls } q_1 = \frac{1}{2} \\ \text{immer Zahl'} & \text{falls } q_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Nun legen wir die beiden Beste-Antwort-Korrespondenzen einfach übereinander:



Beobachtung: Die Beste-Antwort-Korrespondenzen schneiden sich im Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Schlussfolgerung: Wenn beide Spieler ihre Strategien jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ spielen, hat niemand einen Anreiz, abzuweichen — wir sind in einem Nash-Gleichgewicht.

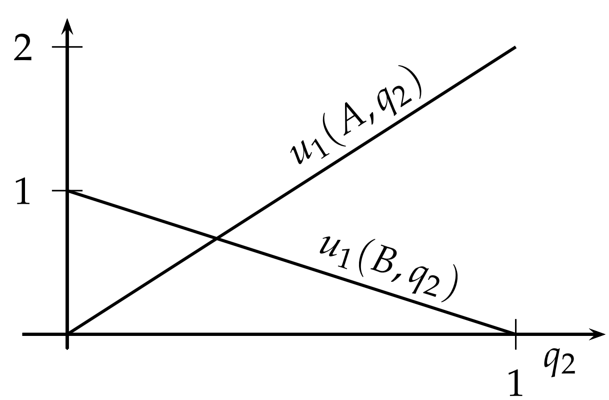
Beispiel 4.12.

		Spieler 2	
		c	d
Spieler 1	A	0, 0	2, 1
	B	1, 2	0, 0

Nehmen wir an, Spieler 2 spielt d mit Wahrscheinlichkeit q_2 und c mit Wahrscheinlichkeit $1 - q_2$.

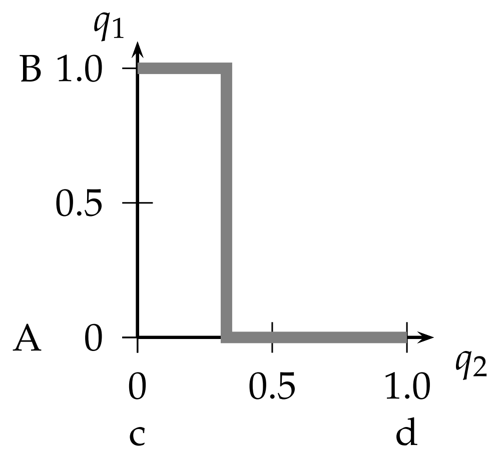
Dann ist die Auszahlung von Spieler 1

$$u_1(A, q_2) = 2q_2$$
$$u_1(B, q_2) = (1 - q_2)$$



Die Beste-Antwort-Korrespondenz von Spieler 1 ist also

$$\sigma_1 = \begin{cases} \text{immer A} & \text{falls } q_2 > \frac{1}{3} \\ \text{jede Mischung von A und B} & \text{falls } q_2 = \frac{1}{3} \\ \text{immer B} & \text{falls } q_2 < \frac{1}{3} \end{cases}$$



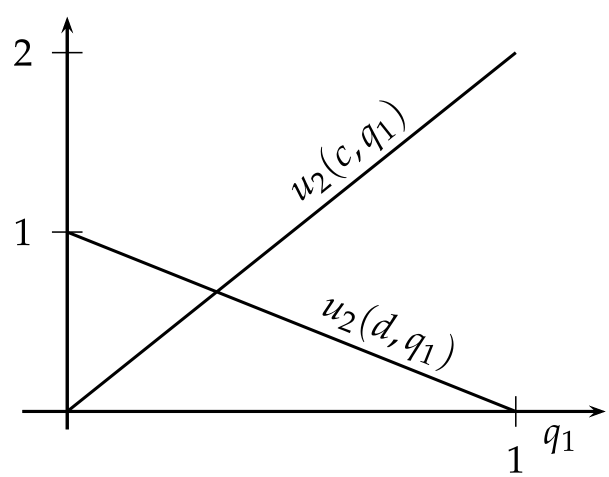
Spieler 2

Spieler 1	c	d
A	0 0	1 2
B	2 1	0 0

Nehmen wir an, Spieler 1 spielt B mit Wahrscheinlichkeit q_1 und A mit Wahrscheinlichkeit $1 - q_1$.

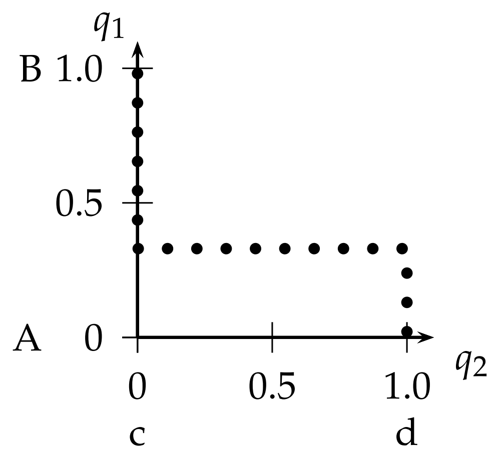
Dann ist die Auszahlung von Spieler 2

$$\begin{aligned} u_2(c, q_1) &= 2q_1 \\ u_2(d, q_1) &= (1 - q_1) \end{aligned}$$

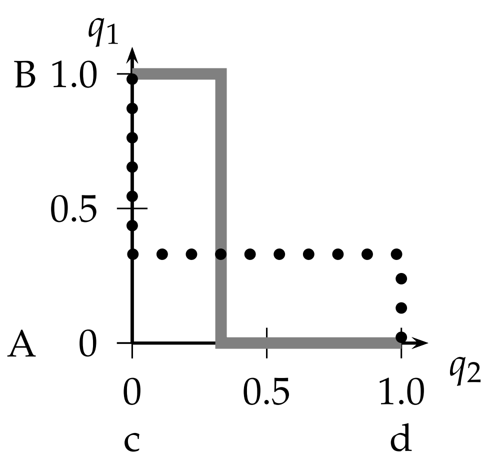


Die Beste-Antwort-Korrespondenz von Spieler 2 ist also

$$\sigma_2 = \begin{cases} \text{immer c} & \text{falls } q_1 > \frac{1}{3} \\ \text{jede Mischung von c und d} & \text{falls } q_1 = \frac{1}{3} \\ \text{immer d} & \text{falls } q_1 < \frac{1}{3} \end{cases}$$



Nun legen wir die beiden Beste-Antwort-Korrespondenzen einfach übereinander:



		Spieler 2	
		c	d
Spieler 1	A	0, 0	2, 1
	B	1, 2	0, 0

Beobachtung: Die Beste-Antwort-Korrespondenzen schneiden sich in drei Punkten $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $(0, 1)$. Es gibt also drei Nash Gleichgewichte:

- $\sigma(\{A, B\}, \{c, d\}) = (\{1, 0\}, \{0, 1\})$
- $\sigma(\{A, B\}, \{c, d\}) = (\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}, \{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\})$
- $\sigma(\{A, B\}, \{c, d\}) = (\{0, 1\}, \{1, 0\})$

Beispiel 4.13.

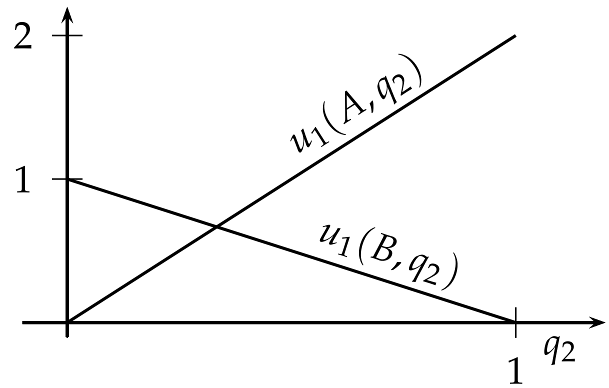
Spieler 2

Spieler 1	c	d
A	0, 0	2, 0
B	1, 2	0, 1

Nehmen wir an, Spieler 2 spielt d mit Wahrscheinlichkeit q_2 und c mit Wahrscheinlichkeit $1 - q_2$.

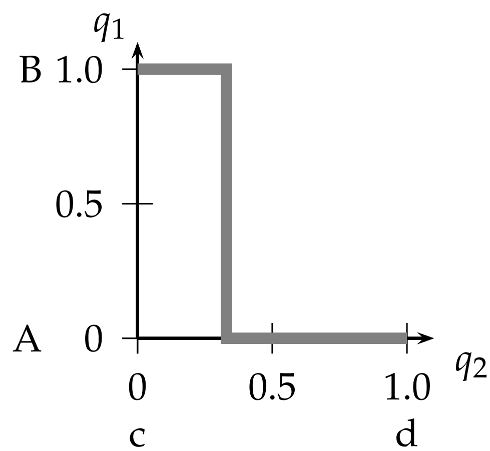
Dann ist die Auszahlung von Spieler 1

$$\begin{aligned} u_1(A, q_2) &= 2q_2 \\ u_1(B, q_2) &= (1 - q_2) \end{aligned}$$



Die Beste-Antwort-Korrespondenz von Spieler 1 ist also

$$\sigma_1 = \begin{cases} \text{immer A} & \text{falls } q_2 > \frac{1}{3} \\ \text{jede Mischung von A und B} & \text{falls } q_2 = \frac{1}{3} \\ \text{immer B} & \text{falls } q_2 < \frac{1}{3} \end{cases}$$



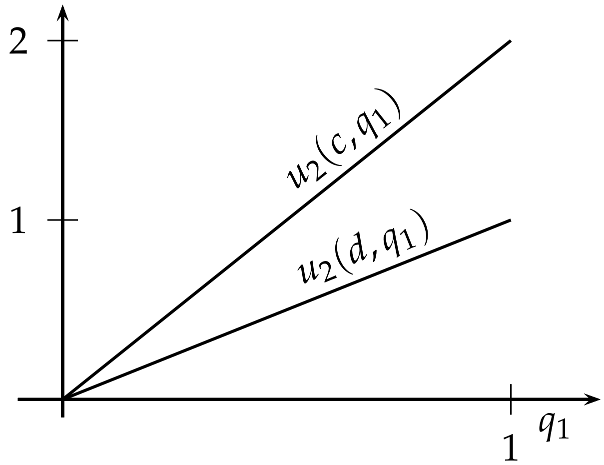
Spieler 2

Spieler 1	c	d
A	0, 0	2, 0
B	1, 2	0, 1

Nehmen wir an, Spieler 1 spielt B mit Wahrscheinlichkeit q_1 und A mit Wahrscheinlichkeit $1 - q_1$.

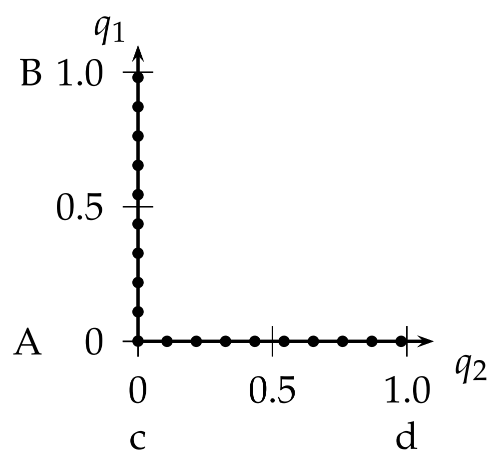
Dann ist die Auszahlung von Spieler 2

$$\begin{aligned} u_2(c, q_1) &= 2q_1 \\ u_2(d, q_1) &= q_1 \end{aligned}$$

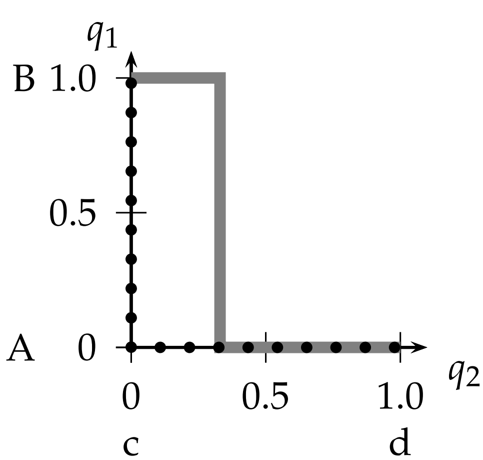


Die Beste-Antwort-Korrespondenz von Spieler 2 ist also

$$\sigma_1 = \begin{cases} \text{immer c} & \text{falls } q_1 > 0 \\ \text{jede Mischung von c und d} & \text{falls } q_1 = 0 \end{cases}$$



Nun legen wir die beiden Beste-Antwort-Korrespondenzen einfach übereinander:



		Spieler 2: c	Spieler 2: d
Spieler 1	A	0, 0	2, 0
	B	1, 2	0, 1

Beobachtung: Die Beste-Antwort-Korrespondenzen schneiden sich in unendlich vielen Punkten. Es gibt unendlich viele Nash Gleichgewichte:

- $\sigma(\{A,B\},\{c,d\}) = (\{0,1\},\{1,0\})$
- $\sigma(\{A,B\},\{c,d\}) = (\{1,0\},\{1-q_2,q_2\})$ mit $\frac{1}{3} \leq q_2 \leq 1$.

4.5.1 Tipps zur Vorgehensweise

1. Spiel vereinfachen (durch Eliminieren von strikt dominierten Strategien)
2. Für jeden Spieler Auszahlungsfunktionen abhängig von der gemischten Strategie der anderen Spieler berechnen.
3. Aus den Auszahlungsfunktionen die Beste-Antwort-Korrespondenz herleiten.
4. Die Schnittpunkte der Beste-Antwort-Korrespondenzen aller Spieler sind die Nash Gleichgewichte.

4.5.2 Übungen

Übung 4.13. Eva und Maria wollen sich im Café treffen, um zu lernen. Beide überlegen sich nun folgendes: Wenn Sie sich erfolgreich treffen, können Sie eine Menge lernen und haben jede eine Auszahlung von 12. Wenn eine daheim bleibt, lernt sie (allein) nicht so erfolgreich und hat nur eine Auszahlung von 8. Falls eine alleine im Café ist, und die andere kommt nicht, kann sie gar nicht lernen (weil sie von anderen Dingen abgelenkt wird) und hat eine Auszahlung von 0 (wir nennen dieses Spiel auch „Stag-hunt-game“).

1. Stellen Sie das Spiel in Normalform dar?
2. Eva glaubt, dass Maria mit Wahrscheinlichkeit 1/2 ins Café gehen wird. Wie wird sie sich entscheiden?
3. Maria glaubt, dass Eva mit Wahrscheinlichkeit 9/10 ins Café gehen wird. Wie wird sie sich entscheiden?
4. Finden Sie nun alle Nash Gleichgewichte in gemischten Strategien.

Übung 4.14. Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte des folgenden Spiels:

		Maria	
		c	d
Eva	A	1 2	0 0
	B	0 0	2 1

Übung 4.15. Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Maria	
		d	e
	A	1 5	0 0
Eva	B	6 2	1 1
	C	0 0	2 3

1. Bestimmen Sie die Auszahlungsfunktionen für Eva und stellen Sie sie graphisch dar.
2. Vereinfachen Sie das Spiel durch Eliminieren strikt dominierter Strategien
3. Bestimmen Sie die Beste-Antwort-Korrespondenzen für beide Spielerinnen und stellen Sie sie graphisch dar.
4. Geben Sie alle Nash-Gleichgewichte an.

Übung 4.16. Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Maria	
		d	e
	A	0 0	-2 2
Eva	B	-1 1	-1 1
	C	-2 2	0 0

Bestimmen Sie ein Nash Gleichgewicht in gemischten Strategien. (aus [1, 6.10.34])

Übung 4.17. Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Maria		
		e	f	g
Eva	A	3, -3	1, -1	0, 0
	B	1, -1	2, -2	-1, 1
	C	-1, 1	2, -2	1, -1
	D	0, 0	1, -1	3, -3

Bestimmen Sie ein Nash Gleichgewicht in gemischten Strategien. (aus [1, 6.10.35])

Übung 4.18. Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Maria	
		c	d
Eva	A	2, 2	0, 0
	B	0, 1	1, 1

1. Vereinfachen Sie das Spiel durch Elimination schwach dominierter Strategien. Welche Nash Gleichgewichte hat das vereinfachte Spiel?

2. Haben Sie bei der Elimination Nash Gleichgewichte in reinen Strategien verloren?

3. Haben Sie bei der Elimination Nash Gleichgewichte in gemischten Strategien verloren? Beschreiben Sie diese Gleichgewichte.

Bestimmen Sie ein Nash Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Übung 4.19.
1. Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte des folgenden Spiels für $x = 5$

2. Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte des folgenden Spiels für $x = 10$

		Maria	
		c	d
Eva	A	3, 3	2, x
	B	x, 2	0, 0

Übung 4.20. Zeigen Sie, dass Stein-Schere-Papier nur ein einziges Nash Gleichgewicht hat.

Übung 4.21. (Diffusion von Verantwortung) Eine Gruppe von n Personen hat die Möglichkeit, ein öffentliches Gut herzustellen. Dazu muss ein Gruppenmitglied Kosten in Höhe von c aufwenden. In diesem Fall genießen alle Gruppenmitglieder einen Nutzen von u.

1. Finden Sie alle Gleichgewichte in reinen Strategien.
2. Finden Sie ein Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Übung 4.22. Eva und Maria spielen Karten. Jede hat ein Ass, einen König, eine Dame und einen Buben. Sie legen gleichzeitig je eine Karte auf den Tisch.

- Falls Sie beide ein Ass gelegt haben, gewinnt Eva.
- Falls nur ein Ass gelegt wurde, gewinnt Maria.
- Falls Sie beide einen König gelegt haben, gewinnt Maria.
- Falls Sie beide eine Dame gelegt haben, gewinnt Maria.
- Falls Sie beide einen Buben gelegt haben, gewinnt Maria.
- In allen anderen Fällen gewinnt Eva.

1. Stellen Sie das Spiel in Bi-Matrix-Form dar.
2. Das Spiel hat nur ein Nash Gleichgewicht in gemischten Strategien. Finden Sie es.

(aus [1, 6.10.41])

Übung 4.23. Finden Sie im folgenden Spiel alle Nash Gleichgewichte in gemischten Strategien.

Spieler 2

		d	e	f
Spieler 1	A	0 2	1 1	2 4
	B	4 3	2 1	3 2
	C	3 1	2 0	0 3

Übung 4.24.

Spieler 2

		f	g	h
Spieler 1	A	4 4	2 2	1 1
	B	2 2	1 1	4 4
	C	1 1	4 4	2 2
	D	9 2	9 2	9 2
	E	9 0	9 0	9 0

Übung 4.25.

Spieler 2

		f	g	h
Spieler 1	A	0 3	2 0	3 3
	B	3 0	2 3	0 0

Übung 4.26. Zwei Spieler wählen gleichzeitig eine ganze Zahl zwischen 11 und 20. Jeder bekommt die gewählte Zahl als Geldbetrag ausgezahlt. Falls ein Spieler eine Zahl gewählt hat, die genau eine Einheit kleiner war, als die Zahl des anderen, erhält dieser Spieler zusätzlich 20 Geldeinheiten.

4.6 Existenz von Nash Gleichgewichten

Satz 6 (Nash 1950)**.** *Jedes Normalformspiel mit einer endlichen Zahl von Spielern und einer endlichen Zahl von Strategien hat mindestens ein Nash Gleichgewicht.*

4.7 Auswahl von Gleichgewichten

		Maria	
		c	d
Eva	A	0 / 0	1 / 2
	B	2 / 1	0 / 0

4.7.1 Evolutionär stabile Strategien

Nash Gleichgewichte setzen sehr viel Rationalität voraus. Kommt man auch mit weniger Rationalitätanforderungen aus?

- Wir stellen uns vor, dass eine Population von Tieren oder Pflanzen mit sich selbst in einem symmetrischen Spiel in strategischer Interaktion ist. Jedes Mitglied der Population benutzt eine Strategie. Frage: Kann man etwas über den langfristigen Zustand der Population sagen?

- Der Zustand der Population zu jedem Zeitpunkt sei beschrieben durch $\sigma = p_1 s_1 + p_2 s_2 + \ldots + p_n s_n$. Die durchschnittliche Auszahlung eines Spielers vom Typ i ist $u_{i\sigma} = \sum u_{i,j} p_j$.

- Die durchschnittliche Auszahlung aller Spieler ist $u_{\sigma,\sigma}$. Nun taucht eine kleine Anzahl ϵ Mutanten vom Typ j auf. Dann ist der Zustand der Population nicht mehr σ sondern $\tau = (1-\epsilon)\sigma + \epsilon s_j$.

Die durchschnittliche Auszahlung der nicht-Mutanten ist mithin

$$u_{\sigma\tau} = (1-\epsilon)u_{\sigma\sigma} + \epsilon u_{\sigma j}$$

Die durchschnittliche Auszahlung der Mutanten ist mithin

$$u_{j\tau} = (1-\epsilon)u_{j\sigma} + \epsilon u_{jj}$$

Ein Mutant $j \neq \sigma$ kann <u>in eine Population eindringen</u> wenn für hinreichend kleines ϵ gilt

$$u_{j\tau} \geq u_{\sigma\tau}$$

Definition 14 (ESS). σ ist eine evolutionär stabile Strategie wenn es keinen Mutanten gibt, der in die Population σ eindringen kann.

Satz 7. *σ ist evolutionär stabil genau dann, wenn für jeden Mutanten j gilt*

$$u_{\sigma\sigma} \geq u_{j\sigma}$$

und

$$\textit{wenn } u_{\sigma\sigma} = u_{j\sigma} \textit{ dann } u_{\sigma j} > u_{jj}$$

Beispiel 4.14. Beweisen Sie diesen Satz.

Satz 8. *Jede evolutionär stabile Strategie definiert ein Nash Gleichgewicht.*

Beispiel 4.15. Beweisen Sie diesen Satz.

Beispiel 4.16. Zeigen Sie, dass das Nash Gleichgewicht in Stein-Schere-Papier nicht evolutionär stabil ist.

Beispiel 4.17. Betrachten Sie das folgende Spiel:

Eva \ Maria	l	r
L	2, 2	0, 0
R	0, 0	1, 1

Welche Gleichgewichte finden Sie? Welche davon sind evolutionär stabil?

Asymmetrische Spiele Das folgende Spiel ist nicht symmetrisch:

Rolle 1 \ Rolle 2	c	d
A	0, 0	6, 3
B	3, 6	0, 0

Wir stellen uns vor, dass ein Spieler für beide Rollen jeweils eine Strategie hat.

Für beide Rollen legt die Strategie des symmetrisierten Spieles fest, welche Strategie im ursprünglichen Spiel zu spielen ist.

Ein Spieler mit der (symmetrischen) Strategie Xy, der auf einen Spieler mit $X'y'$ trifft, spielt manchmal Xy' und manchmal yX' und erhält $u(X, y') + u(y, X')$

In der folgenden Tabelle schauen wir uns nur die Nash-Gleichgewichte an. Welche von diesen Gleichgewichten sind evolutionär stabil?

Spieler II

	σ	σ	Ac	Ad	Bc	Bd
Spieler I	Bc	9, 9	3, 6	0, 0	9, 9	6, 3
	Ad	9, 9	3, 6	9, 9	0, 0	6, 3
	$\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B, \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d$	8, 8	8, 8	8, 8	8, 8	8, 8
	j		0, 0	9, 9	9, 9	0, 0

Die Nash-Gleichgewichte Bc und Ad sind stabil. Gegen sich selbst erhält die Population jeweils 9. Ein Mutant, der mit einer anderen Strategie versucht, in die Population einzudringen, erhält nur 6 oder 3 oder 0.

Das gemischt Gleichgewicht $\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B, \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d$ ist nicht stabil. Die Population erhält gegen sich selbst nur 8. Auch jeder Mutant erhält gegen die Population nur 8. Allerdings erhält z.B. der Mutant Ad gegen sich selbst 9, kann also erfolgreich eindringen.

Übung 4.27. Betrachten Sie das folgende Spiel:

Maria

Eva		a	b
	A	2, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 2

Welche Gleichgewichte finden Sie? Welche davon sind evolutionär stabil?

Übung 4.28. Betrachten Sie das folgende Spiel:

Maria

Eva		a	b
	A	0, 1	1, 0
	B	2, 0	0, 2

Welche Gleichgewichte finden Sie? Welche davon sind evolutionär stabil?

4.7.2 Pareto Effizienz als Auswahlkriterium

Welche Strategie würden Sie in den folgenden beiden Spielen wählen?

Beispiel 4.18.

Eva \ Maria	c	d
A	3, 4	0, 0
B	0, 0	1, 2

Eva \ Maria	c	d
A	2, 6	0, 0
B	0, 0	8, 4

Pareto Effizienz dient uns in einfachen Spielen aus Gleichgewichtsauswahlkriterium. Es gibt aber Spiele, in denen wir auf diese Weise kein eindeutiges Gleichgewicht finden.

4.7.3 Payoff Transformationen die die Beste Antwort Struktur nicht verändern

Das folgende Spiel sei ein Koordinationsspiel:

Eva \ Maria	A'	B'
A	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}
B	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

mit
$$\begin{array}{l} a_{11}-a_{21}>0 \\ b_{11}-b_{12}>0 \\ a_{22}-a_{12}>0 \\ b_{22}-b_{21}>0 \end{array}$$

Die Gleichgewichte sind: A, A', B, B', und
$$p_A = \frac{b_{22}-b_{21}}{(b_{22}-b_{21})+(b_{11}-b_{12})}$$
$$p_{A'} = \frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{22}-a_{12})+(a_{11}-a_{21})}$$

Wie sieht man das?

$$\begin{aligned}
p_A b_{11}+(1-p_A)b_{21} &= p_A b_{12}+(1-p_A)b_{22} \\
p_A(b_{11}-b_{21})+b_{21} &= p_A(b_{12}-b_{22})+b_{22} \\
p_A\left((b_{11}-b_{21})-(b_{12}-b_{22})\right) &= +b_{22}-b_{21} \\
p_A &= \tfrac{b_{22}-b_{21}}{(b_{22}-b_{21})+(b_{11}-b_{12})}
\end{aligned}$$

Genauso für $p_{A'}$

$$\begin{aligned}
p_{A'}a_{11} + (1 - p_{A'})a_{12} &= p_{A'}a_{21} + (1 - p_{A'})a_{22} \\
p_{A'}(a_{11} - a_{12}) + a_{12} &= p_{A'}(a_{21} - a_{22}) + a_{22} \\
p_{A'}\left((a_{11} - a_{12}) - (a_{21} - a_{22})\right) &= +a_{22} - a_{12} \\
p_{A'} &= \tfrac{a_{22}-a_{12}}{(a_{22}-a_{12})+(a_{11}-a_{21})}
\end{aligned}$$

$$\text{Die beste Antwort für Eva: } \begin{cases} A & \text{falls } p_{A'} > \frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{22}-a_{21})+(a_{11}-a_{12})} \\ B & \text{falls } p_{A'} < \frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{22}-a_{21})+(a_{11}-a_{12})} \\ \text{indifferent} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Die beste Antwort für Maria: } \begin{cases} A' & \text{falls } p_{A'} > \frac{b_{22}-b_{21}}{(b_{22}-b_{12})+(b_{11}-b_{21})} \\ B' & \text{falls } p_{A'} > \frac{b_{22}-b_{21}}{(b_{22}-b_{12})+(b_{11}-b_{21})} \\ \text{indifferent} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die beste Antwort Struktur ändert sich nicht, wenn wir stattdessen das folgende Spiel betrachten:

		Maria A'	Maria B'
Eva	A	u_1, u_2	0, 0
	B	0, 0	v_1, v_2

mit
$$\begin{aligned}
u_1 &= a_{11} - a_{21} > 0 \\
u_2 &= b_{11} - b_{12} > 0 \\
v_1 &= a_{22} - a_{12} > 0 \\
v_2 &= b_{22} - b_{21} > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_A u_2 + (1 - p_A)0 &= p_A 0 + (1 - p_A)v_2 \\
p_A(u_2 - 0) + 0 &= p_A(0 - v_2) + v_2 \\
p_A\left((u_2 - 0) - (0 - v_2)\right) &= +v_2 - 0 \\
p_A &= \tfrac{v_2-0}{(v_2-0)+(u_2-0)}
\end{aligned}$$

$$p_A = \frac{b_{22}-b_{21}}{(b_{22}-b_{21})+(b_{11}-b_{12})}$$

$$\begin{aligned}
p_{A'}u_1 + (1-p_{A'})0 &= p_{A'}0 + (1-p_{A'})v_1 \\
p_{A'}(u_1 - 0) + 0 &= p_{A'}(0 - v_1) + v_1 \\
p_{A'}\left((u_1-0)-(0-v_1)\right) &= +v_1 - 0 \\
p_{A'} &= \frac{v_1-0}{(v_1-0)+(u_1-0)}
\end{aligned}$$

4.7.4 Risikodominanz als Auswahlkriterium

Beispiel 4.19.

Maria

Eva	A'	B'
A	99, 49	0, 0
B	0, 0	1, 51

Allgemein:

Maria

Eva	A'	B'
A	u_1, u_2	0, 0
B	0, 0	v_1, v_2

Eva wird um so eher A spielen wollen, je größer u_1/v_1, Maria wird eher B spielen wollen, je größer v_2/u_2.

Definition 15 (Risikodominanz)**.** A risikodominiert B wenn $u_1u_2 > v_1v_2$.

Beispiel 4.20. Was sind Pareto-effiziente und risikodominante Gleichgewichte im folgenden Spiel:

Maria

Eva	A'	B'
A	9, 7	0, 1
B	7, 2	8, 6

$\rightarrow$

Maria

Eva	A'	B'
A	2, 6	0, 0
B	0, 0	8, 4

Was sind Pareto-effiziente und risikodominante Gleichgewichte in einem symmetrischen Spiel mit $a > c$ und $d > b$:

Beispiel 4.21.

Maria

Eva	A	B
A	a a	c b
B	b c	d d

$\rightarrow$

Maria

Eva	A	B
A	$a-c$ $a-c$	0 0
B	0 0	$d-b$ $d-b$

A, A risikodominiert B, B falls $(a-c) > (d-b)$

Übung 4.29. Betrachten Sie das folgende Spiel:

Maria

Eva	c	d
A	3 2	0 0
B	0 0	2 4

Finden Sie ein risikodominantes Gleichgewicht?

Übung 4.30. Betrachten Sie das folgende Spiel:

Maria

Eva	c	d
A	7 3	9 9
B	9 9	6 1

Finden Sie ein risikodominantes Gleichgewicht?

Übung 4.31. Betrachten Sie das folgende Spiel:

Maria

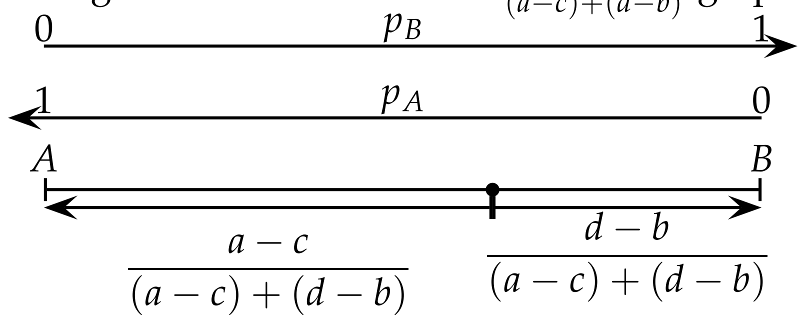
Eva	c	d
A	2 2	-1 -1
B	-1 -1	1 1

Finden Sie ein risikodominantes Gleichgewicht?

4.7.5 Evolution von Konventionen

		Maria	
		A	B
Eva	A	a, a	b, c
	B	c, b	d, d

Im gemischten Gleichgewicht wird A mit WS $\frac{d-b}{(a-c)+(d-b)}$ gespielt.



Idee für eine evolutionäre Dynamik einer endlich großen Population in diskreter Zeit:

- in jeder Periode bestimmen alle Mitglieder der Population die beste Antwort auf den aktuellen Zustand der Population und spielen diese Strategie in der nächsten Periode
- mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit passieren dabei Fehler

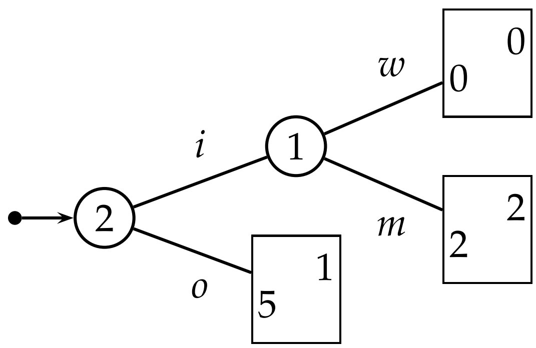
A, A risikodominiert B, B falls $(a-c) > (d-b)$

Satz 9 (KMR, Young)**.** *Mit Wahrscheinlichkeit 1 befindet sich die Population im risikodominanten Gleichgewicht*

5 Spiele in extensiver Form mit vollständiger Information

5.1 Notation als Baum

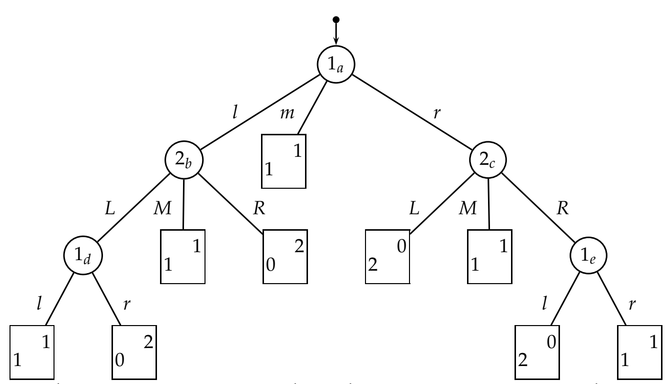
Wir beschreiben Spiele in extensiver Form mit vollständiger Information als Baum. Hier ist ein Beispiel:



- Die Wurzel des Baumes wird mit einem $\rightarrow$ gekennzeichnet.
- Die einzelnen Spieler werden an den Knoten des Baumes in Kreisen dargestellt: 1, 2.
- Züge der jeweiligen Spieler werden an den Kanten des Baumes dargestellt.
- Auszahlungen werden wie in der Darstellung eines Normalformspiels gezeigt.

5.2 Knoten und Informationsbezirke

Einstweilen werden wir davon ausgehen, dass jeder Spieler der am Zug ist genau weiß, in welchem Knoten er sich befindet. Wir nenne die Knoten auch Informationsbezirke.

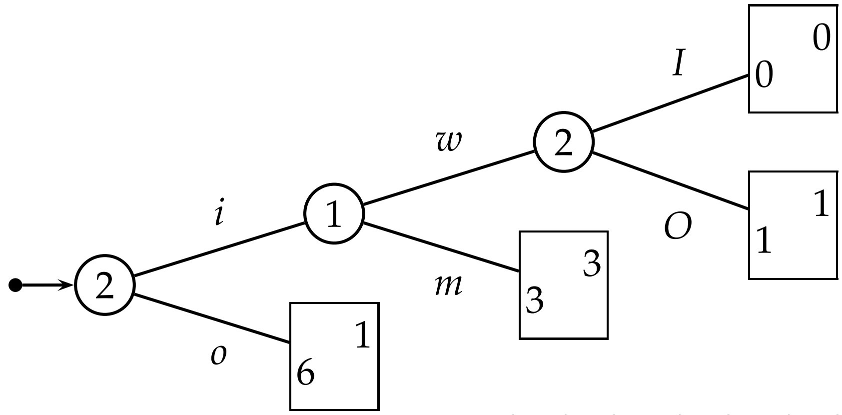


Das muss aber nicht sein. In Abschnitt 8.1 werden wir diese Annahme lockern.

5.3 Züge und Strategien

Definition 16 (Zug)**.** Wir nennen die Aktionen eines Spielers in einem Informationsbezirk des Spielbaums auch Zug.

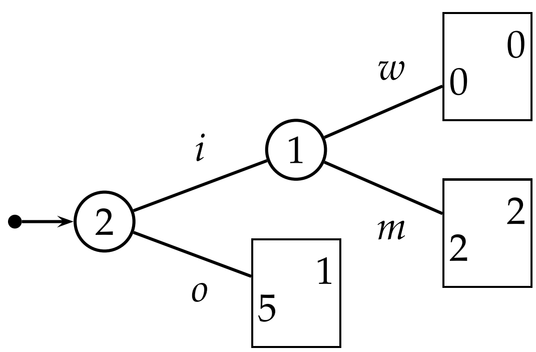
Beachte: Eine reine Strategie für einen Spieler ist eine Vorschrift von Zügen für alle Informationsbezirke an denen dieser Spieler am Zug ist.



Spieler 2 hat hier vier reine Strategien: $\{i, I\}, \{i, O\}, \{o, I\}, \{o, O\}$. Beachten Sie, dass z.B. die Strategie $\{o, I\}$ auch vorschreibt, was Spieler 2 am dritten Knoten tun soll, obwohl er ihn nie erreicht, wenn der dieser Strategie folgt.

5.4 Partien und Kombinationen reiner Strategien

Bleiben wir noch bei unserem Beispiel:



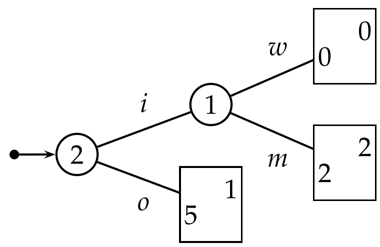
- Die Menge der reinen Strategien der beiden Spieler, 1 und 2, sind $S_1 = \{m, w\}$ und $S_2 = \{i, o\}$. Es gibt also vier mögliche Kombinationen von reinen Strategien: $S = \{\{i, m\}, \{i, w\}, \{o, m\}, \{o, w\}\}$.

- Beachten Sie, dass wir zwischen den beiden Kombinationen von reinen Strategien $\{o, m\}$ und $\{o, w\}$ unterscheiden, obwohl die Partie in beiden Fällen den gleichen Verlauf nimmt.

- Nochmal: Es gibt in diesem Beispiel drei verschiedene Partien $\{\{i, m\}, \{i, w\}, \{o\}\}$. Es gibt aber vier verschiedene Kombinationen von reinen Strategien: $S = \{\{i, m\}, \{i, w\}, \{o, m\}, \{o, w\}\}$.

5.5 Ökonomische Interpretation des Beispiels

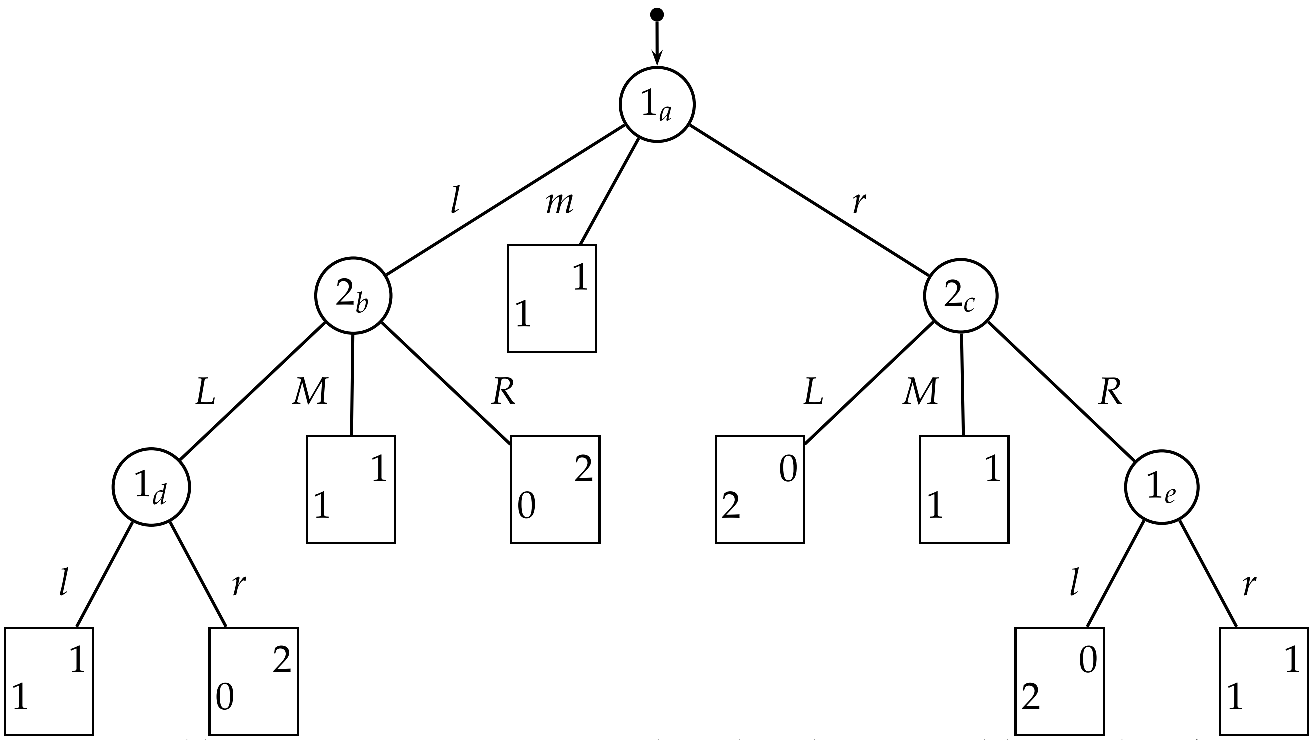
Das Spiel, das wir hier betrachten, ist eine Form des sogenannten chainstore games.



- Das Spiel spielt in einer Kleinstadt in der es einen Laden (Spieler 1) gibt. Der Laden agiert derzeit als Monopolist (und macht mithin hohe Gewinne).
- Ein Konkurrent (Spieler 2) überlegt sich, einen zweiten Laden aufzumachen. Wenn er das nicht tut, $(\{o\})$ macht der Monopolist nach wie vor hohe Profite (5) und der Konkurrent verdient irgendwo anders ein bisschen Geld (1).
- Wenn aber der Konkurrent zutritt $(\{i\})$ hat der Monopolist zwei Möglichkeiten: Er lässt sich auf ein Oligopol ein (beide erhalten 2) oder er kann versuchen, durch Preiskampf die Preise auf dem Markt soweit zu drücken, dass weder er selbst noch der Zudringling Gewinne machen kann (beide erhalten 0).

Beispiel 5.1. Finden Sie alle Nash Gleichgewichte des chainstore games

Betrachten Sie das folgende Spiel in extensiver Form.



Das Spiel beginnt im Knoten 1_a. Spieler 1 hat die Auswahl zwischen l, m, und r. Bei m ist das Spiel zu Ende und beide Spieler erhalten 1. Bei l wird der Knoten 2_b erreicht. Bei r wird der Knoten 2_c erreicht. Im Knoten 2_b hat Spieler 2 die Wahl zwischen 3 Zügen. Zieht er L wird der Knoten 1_d erreicht. Zieht er M endet das Spiel mit einer Auszahlung von 1 für beide Spieler. Zieht er R endet das Spiel mit einer Auszahlung von 2 für Spieler 2. Im Knoten 1_d ist Spieler 1 am Zug und wählt zwischen l und r. Bei l erhalten beide Spieler eine Auszahlung von 1. Bei r erhalten erhält nur Spieler 2 eine Auszahlung von 2. Im Knoten 2_c wählt Spieler 2 zwischen L, M und R. Bei R erhält Spieler 1 eine Auzahlung von 2. Bei M erhalten beide eine Auszahlung von 1. Bei R wird Knoten 1_e erreicht. Dort ist Spieler 1 am Zug und wählt zwischen l und r. Bei l bekommt nur Spieler 1 eine Auszahlung von 2. Bei r bekommen beide eine Auszahlung von 1.

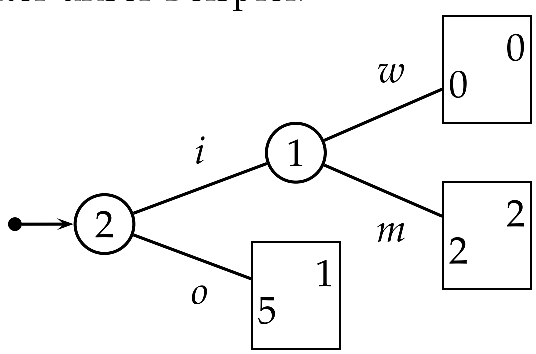
Beispiel 5.2.

1. Wieviele reine Strategien hat jeder Spieler in diesem Spiel?
2. Listen Sie die reinen Strategien auf.
3. Welche Partie (Folge von Zügen) folgt aus der reinen Strategie $\{rll, LM\}$?
4. Bestimmen Sie alle Kombination von reinen Strategien die zu der Partie (Folge von Zügen) $[rRl]$ führen.
5. Stellen Sie das Spiel in Bi-Matrix-Form dar.

6. Finden Sie alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien.
(aus [1, 1.10.1])

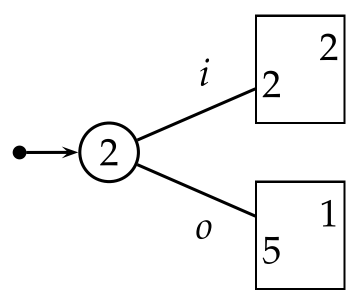
5.6 Rückwärtsinduktion (nach Zermelo)

- Bei Rückwärtsinduktion werden Teilbäume, in denen die Züge aller Spieler die anderen möglichen Züge strikt dominieren, ersetzt durch die Auszahlung bei diesen Zügen. Die Züge merkt man sich.
- Ist ein Spieler in einem Teilbaum indifferent zwischen mehreren Zügen und kann der Teilbaum nicht anderweitig vereinfacht werden, muss jeder Zug separat untersucht werden.
- Betrachten wir weiter unser Beispiel:



- Betrachten wir zunächst den Entscheidungsknoten von Spieler 1. Spielt er $\{m\}$, erhält er 2, spielt er $\{w\}$, erhält er 0. Er bekommt mehr, wenn er $\{m\}$ spielt. Gehen wir also davon aus, dass Spieler 1 immer $\{m\}$ spielt sobald er zum Zug kommt.

Spieler 2 kann sich also auf die Analyse eines vereinfachten Spiels beschränken:

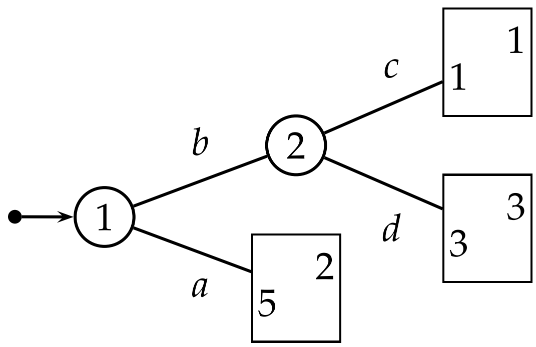


Spieler 2 weiß, dass er mit $\{o\}$ eine Auszahlung von 1 bekommt, mit $\{i\}$ aber eine Auszahlung von 2. Also wird Spieler 2 stets $\{i\}$ wählen.

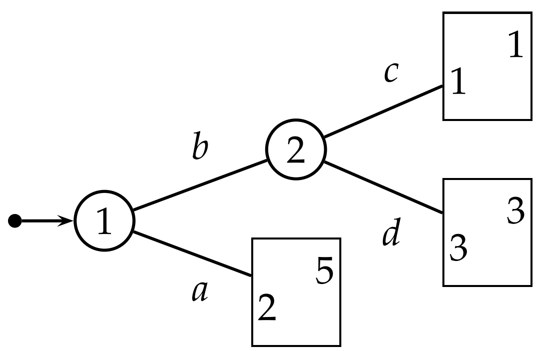
Mit Rückwärtsinduktion erhalten wir die Kombination von reinen Strategien $\{i, m\}$.

In Beispiel 5.1 haben Sie bereits gesehen, dass $\{i, m\}$ auch ein Nash Gleichgewicht ist. Sie haben auch gesehen, dass es aber weitere Nash Gleichgewichte gibt, die wir mit Rückwärtsinduktion nicht finden. Wir kommen in Abschnitt 5.7 darauf zurück.

Übung 5.1. Finden Sie im folgenden Spiel alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion:



Übung 5.2. Finden Sie im folgenden Spiel alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion:



Übung 5.3. Drei Löwen treffen eine Gazelle. Die Löwen sind hungrig und würden die Gazelle gerne fressen. Allerdings wird ein Löwe, der frisst, so träge, dass er leicht von einem anderen Löwen gefressen werden kann. Nehmen Sie an, dass die Löwen der Reihe nach entscheiden, was sie tun. Was passiert, wenn vier Löwen eine Gazelle treffen? Was passiert, wenn 1000 Löwen eine Gazelle treffen?

Übung 5.4. Fünf Piraten, A, B, C, D, und E, haben 100 Goldstücke erbeutet. Sie verteilen sie mit dem folgenden Verfahren: Der Reihe nach (A zuerst, dann B,...), macht ein Pirat einen Vorschlag wie die Goldstücke aufgeteilt werden. Alle Piraten stimmen dann über den Vorschlag ab. Bei einem Unentschieden entscheidet die Stimme dessen, der den Vorschlag gemacht hat. Wird ein Vorschlag abgelehnt, dann wird der Vorschlagende über Bord geworfen und der nächste Pirat macht einen Vorschlag. Piraten haben die folgenden Präferenzen: Zuallererst wollen sie nicht über Bord geworfen werden, dann wollen sie möglichst viele Goldstücke, und schließlich wollen Sie gerne andere Piraten über Bord werfen.

Übung 5.5. Wenden Sie Zermelos Algorithmus auf das Spiel aus Beispiel 5.2 an.

Übung 5.6. Zwei Spieler legen abwechselnd auf einem Spielbrett der Größe 2×3 jeweils einen Dominostein (Dominosteine haben die Größe 1×2 und können nur so gelegt werden, dass sie genau zwei Felder verdecken). Wer als erster keinen Stein mehr legen kann, verliert.

1. Wenden Sie Zermelos Algorithmus an. Was ist die Gleichgewichtsstrategie? Wer gewinnt das Spiel im Gleichgewicht?

2. Nehmen Sie nun an, das Spielbrett habe die Größe $n \times m$. n und m seien beides gerade Zahlen. Wer gewinnt nun?

3. Nun sei n gerade und m ungerade. Wer gewinnt?

4. Wer gewinnt auf einem 3×3-Feld?

(aus [1, 1.10.2])

Übung 5.7. Ein Club mit drei Mitgliedern (1,2,3) möchte ein neues Mitglied aufnehmen. Zur Auswahl stehen vier Kandidaten, A, B, C, und D. Die Clubsatzung sieht folgendes Verfahren vor: Die drei Mitglieder streichen der Reihe nach jeweils einen Kandidaten. Der verbleibende Kandidat wird Mitglied. Die Präferenzen des ersten Mitglieds über die vier Kandidaten sind $A \succ_1 B \succ_1 C \succ_1 D$. Die Präferenzen des zweiten Mitglieds über die vier Kandidaten sind $B \succ_2 C \succ_2 D \succ_2 A$. Die Präferenzen des dritten Mitglieds über die vier Kandidaten sind $C \succ_3 D \succ_3 A \succ_3 B$.

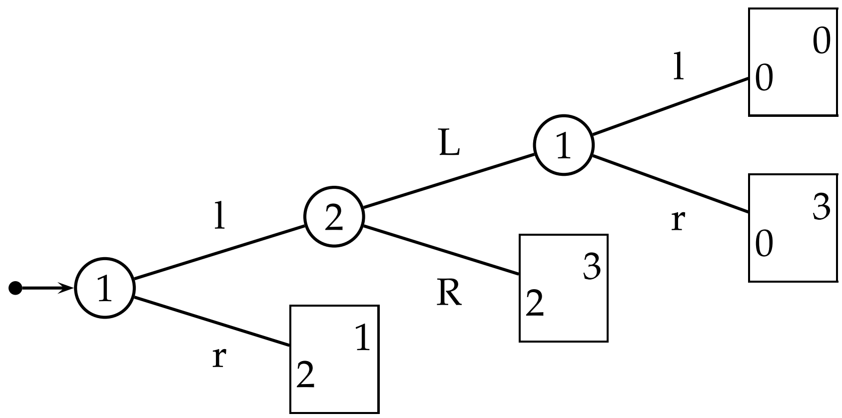
1. Zeichnen Sie den kompletten Spielbaum.

2. Wieviele reine Strategie hat jedes der drei Mitglieder?

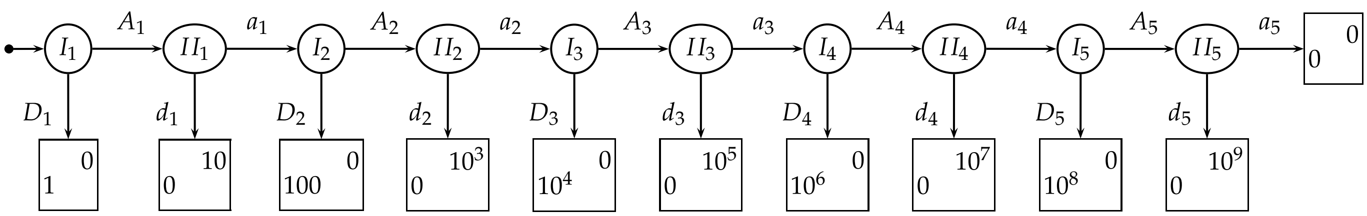
3. Wenden Sie Zermelos Algorithmus an. Wieviele Gleichgewichte finden Sie?

(aus [1, 1.10.3])

Übung 5.8. Wenden Sie im folgenden Spiel Zermelos Algorithmus an. Welche Gleichgewichte finden Sie?



Übung 5.9. Betrachten Sie folgendes Spiel (eine vereinfachte Fassung von Rosenthals Centipede)

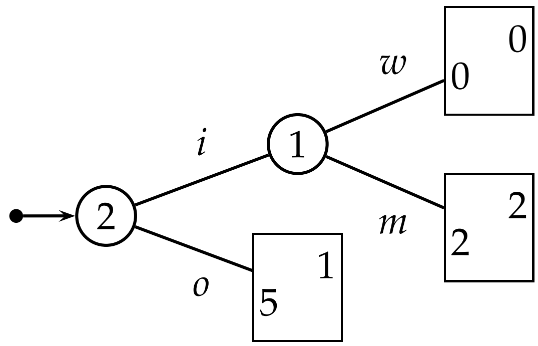


1. Wenden Sie Zermelos Algorithmus an. Welche Gleichgewichte finden Sie?
2. Welche Kombinationen von reinen Strategien bleiben übrig, wenn Sie das Spiel durch Eliminieren schwach dominierter Strategien vereinfachen?
3. Welche Nash Gleichgewichte in reinen Strategien hat das Spiel?
4. Was überlegt sich Spieler 2, wenn er zum Zug kommt?

5.7 Extensive Form und Normalform

Wir können ein Spiel in extensiver Form auch in Normalform darstellen.

extensive Form



$\Rightarrow$

Normalform

		Spieler 2	
		o	i
Spieler 1	w	5, 1	0, 0
	m	5, 1	2, 2

Wenn Sie die Normalform betrachten sehen Sie, dass dieses Spiel zwei Nash Gleichgewichte in reinen Strategien hat $\{i, m\}$, und $\{o, w\}$.

- Anmerkung 1: Auch das Spiel in extensiver Form hat diese beiden Nash Gleichgewichte in reinen Strategien. Die extensive Form stellt nur zusätzliche Information über das Spiel dar, die für die Bestimmung der Nash Gleichgewichte unerheblich ist.

- Anmerkung 2: Warum haben wir mit Rückwärtsinduktion nur ein Gleichgewicht gefunden? Das Gleichgewicht $\{o, w\}$ enthält eine „unglaubwürdige Drohung". Wenn Spieler 2 von seiner Strategie abweichen würde, und nicht $\{o\}$ sondern $\{i\}$ spielen würden, dann wäre es für Spieler 1 nicht mehr rational bei seiner Drohung $\{w\}$ zu bleiben.

- Die Normalform vernachlässigt diese zeitliche Komponente, die es Spieler 1 erlaubt, erst zu beobachten, was Spieler 2 gemacht hat, und dann zu entscheiden. Das Nash Gleichgewicht nimmt implizit an, dass kein Spieler Informationen hat, wie die anderen ziehen werden oder gezogen haben.

- Dieses Beispiel zeigt auch, dass es sehr wichtig ist, sich Gedanken darüber zu machen, was in „nicht erreichten Teilspielen" vor sich geht.

Beispiel 5.3. Was passiert im chainstore game wenn vor dem Spiel der Monopolist dem Zudringling beweisen kann, dass er sich unwiderruflich auf einen Preiskampf bei Zutritt verpflichtet hat?

1. Zeichnen Sie den Spielbaum.

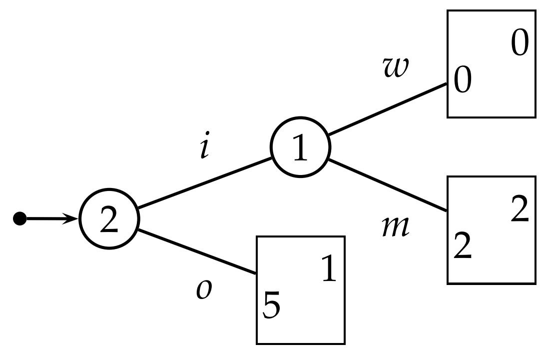
2. Bestimmen Sie das Gleichgewicht durch Rückwärtsinduktion

3. Nehmen Sie an, dass der Monopolist vor dem Spiel zu Kosten von 2 in Zusatzkapazität investieren kann. Die Zusatzkapazität hat nur dann einen Effekt, wenn es zum Preiskampf kommt. In dem Fall erhöht sie die Auszahlung des Monopolisten um 1 (inklusive der Kosten für die Zusatzkapazität).

4. Bestimmen Sie nun das Gleichgewicht durch Rückwärtsinduktion.

5. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Beispiel 5.4. Betrachten Sie nochmals das chainstore game.



Stellen Sie sich vor, dass Spieler 1 dieses Spiel zweimal spielt. Einmal, wie oben beschrieben, mit Spieler 2, dann ein weiteres Mal mit Spieler 3 der an Stelle von Spieler 2 tritt.

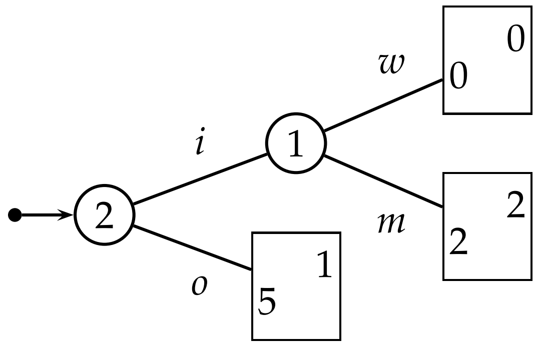
1. Stellen Sie das Spiel in extensiver Form dar.

2. Wenden Sie Zermelos Algorithmus an. Welche Gleichgewichte finden Sie?

5.8 Chain store paradox

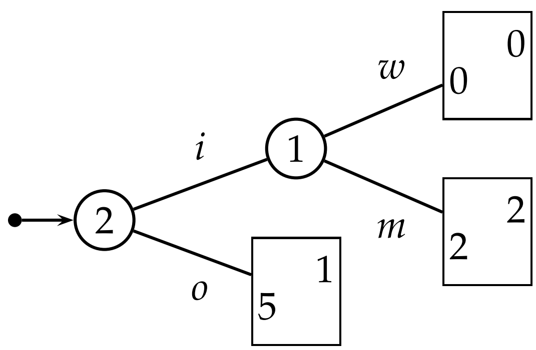
- Betrachten wir nochmal die ökonomische Motivation aus Abschnitt 5.5. Dort gab es einen Marktinhaber, der als Monopolist auftrat, und einen Zudringling. Im Gleichgewicht durch Rückwärtsinduktion lässt sich der Zudringling durch die unglaubwürdige Drohung des Marktinhabers nicht abschrecken.

- Nun nehmen wir an, dass es sich bei dem Marktinhaber um eine Ladenkette handelt, die in 40 Städten eine Niederlassung hat. In allen diesen Städten erhält nacheinander jeweils ein neuer Zudringling die Gelegenheit nur in dieser Stadt auch einen Laden zu eröffnen. Auszahlungen sind wie in dem obigen Spiel.



1	2	3		36	37	38	39	40
2: i	3: i	4: i		37: i	38: i	39: i	40: i	41: i
1: m	1: m	1: m	…	1: m	1: m	1: m	1: m	1: m
2	2	2		2	2	2	2	2
2	2	2		2	2	2	2	2

Auszahlung für $1 : 40 \cdot 2 = 80$



1	2	3	4	5		38	39	40
2: i	3: i	4: i	5: o	6: o		39: o	40: i	41: i
1: w	1: w	1: w	1: –	1: –	…	1: –	1: m	1: m
0	0	0	1	1		1	2	2
0	0	0	5	5		5	2	2

Auszahlung für $1 : 35 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 179$

- Wir können dieses Spiel mit Rückwärtsinduktion lösen und stellen fest, dass in allen Perioden der Zudringling zutritt und der Monopolist sich mit dem Zudringling die Profite teilt.
- Dies ist im wirklichen Leben aber nicht so. Stellen wir uns vor, es sind bereits in zehn Städten Zudringlinge zugetreten, und der Monopolist hat jedesmal mit ruinösem Wettbewerb reagiert. Wird der elfte Zudringling auch noch zutreten?

- Beachte, dass dieses Argument nicht unterstellt, dass der Monopolist irrational ist. Ganz im Gegenteil, mit einem solchen Verhalten würde der Monopolist seinen Gewinn erhöhen — was rational ist.

  (Für weitere Informationen siehe [5])

5.9 Stackelberg

5.9.1 Problem

Zwei Firmen produzieren ein homogenes Gut. Firma 1 produziert die Menge q_1, Firma 2 die Menge q_2. Die Kostenfuktion von Firma i ist $C_i(q_i) = cq_i$.

Cournot: Die beiden Firmen wählen ihre Angebotsmengen q_1 und q_2 simultan.	Stackelberg: Zuerst wählt Firma 1 ihre Menge q_1. Dann wählt Firma 2 ihre Menge q_2.

Die Gesamtmenge nennen wir $Q = q_1 + q_2$.
Der Preis zu dem der Markt geräumt wird ist $p(Q) = a - Q$.
Spieltheoretische Beschreibung:
Spieler: $\{1, 2\}$

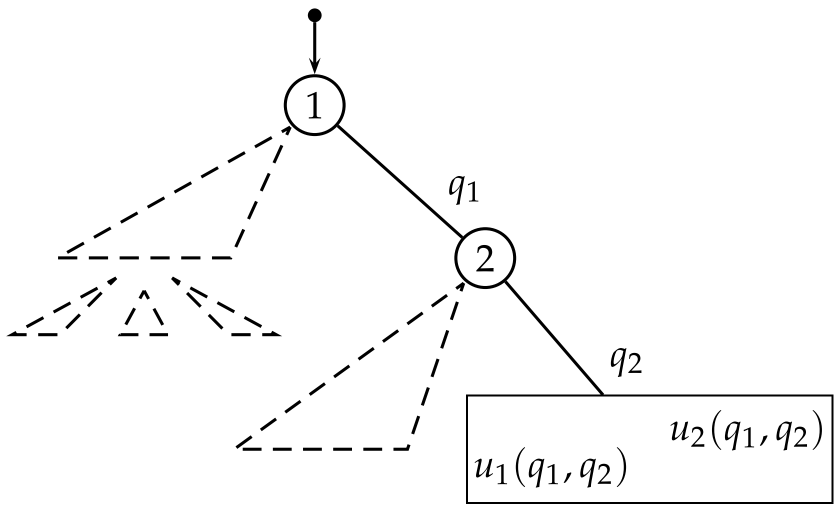
Strategien:

Cournot: $q_1 \in \mathbb{R}, q_2 \in \mathbb{R}$	Stackelberg: $q_1 \in \mathbb{R}, q_2 \in \{f \vert \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\}$

Auszahlung: $u_i(q_i, q_j) = q_i \left(p(q_i + q_j) - c\right) = q_i \left(a - (q_i + q_j) - c\right)$
Lösungskonzept:

Cournot: Nash Gleichgewicht	Stackelberg: Rückwärtsinduktion (Zermelo)

5.9.2 Darstellung des Stackelbergspiels als (unendlicher) Baum



Für alle Knoten in denen Spieler 2 am Zug ist gilt. . .
q_1 ist bekannt.
q_2^* wird demensprechend optimal gewählt, d.h. so, dass

$$u_2(q_2^*, q_1) = \max_{q_2} u_2(q_2, q_1) = \max_{q_2} q_2 \left(a - (q_2 + q_1) - c\right) \tag{9}$$

Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{du_2}{dq_2} = a - 2q_2 - q_1 - c = 0 \tag{10}$$

Bedingung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2u_2}{dq_2{}^2} = -2 < 0 \tag{11}$$

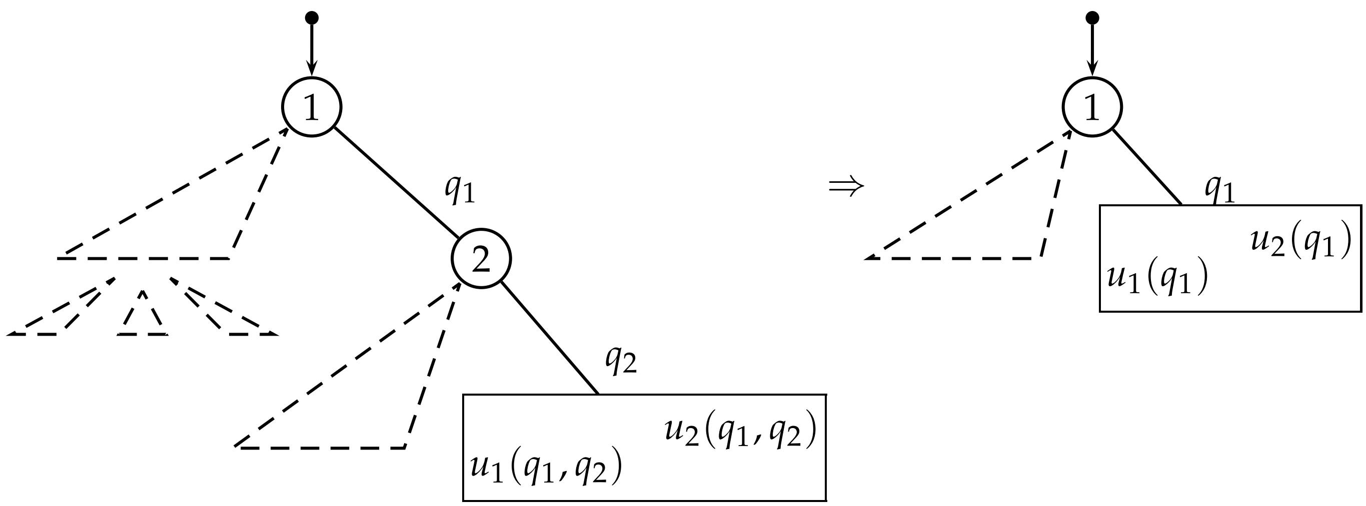
Wir rechnen also wirklich ein Gewinnmaximum und kein -minimum aus.
Löse Bedingung 10 nach q_2 auf:

$$q_2 = \frac{a - q_1 - c}{2} \tag{12}$$

Das können wir verwenden um $u_1(q_1)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} u_1(q_1) &= q_1(a - (q_1 + q_2) - c) && (13)\\ &= q_1\left(a - \left(q_1 + \frac{a - q_1 - c}{2}\right) - c\right) && (14)\\ &= q_1 \frac{a - q_1 - c}{2} && (15) \end{aligned}$$

5.9.3 Vereinfachter Baum für das Stackelbergspiel



5.9.4 Für alle Knoten in denen Spieler 1 am Zug ist gilt...

u_1 hängt nur noch von q_1 ab, also wird q_1^* so gewählt, dass

$$u_1(q_1^*) = \max_{q_1} u_1(q_1) = \max_{q_1} q_1 \frac{a - q_1 - c}{2}$$

Bedingung erster Ordnung ist:

$$\frac{du_1}{dq_1} = \frac{a - 2q_1 - c}{2} = 0 \tag{16}$$

Bedingung zweiter Ordnung ist:

$$\frac{d^2u_1}{d{q_1}^2} = -1 < 0 \tag{17}$$

Löse Bedingung 16 nach q_1 auf:

$$q_1^* = \frac{a-c}{2} \tag{18}$$

und setze in 12 ein:

$$q_2^* = \frac{a - q_1 - c}{2} = \frac{a-c}{4} \tag{19}$$

5.9.5 Zusammenfassung Stackelberg

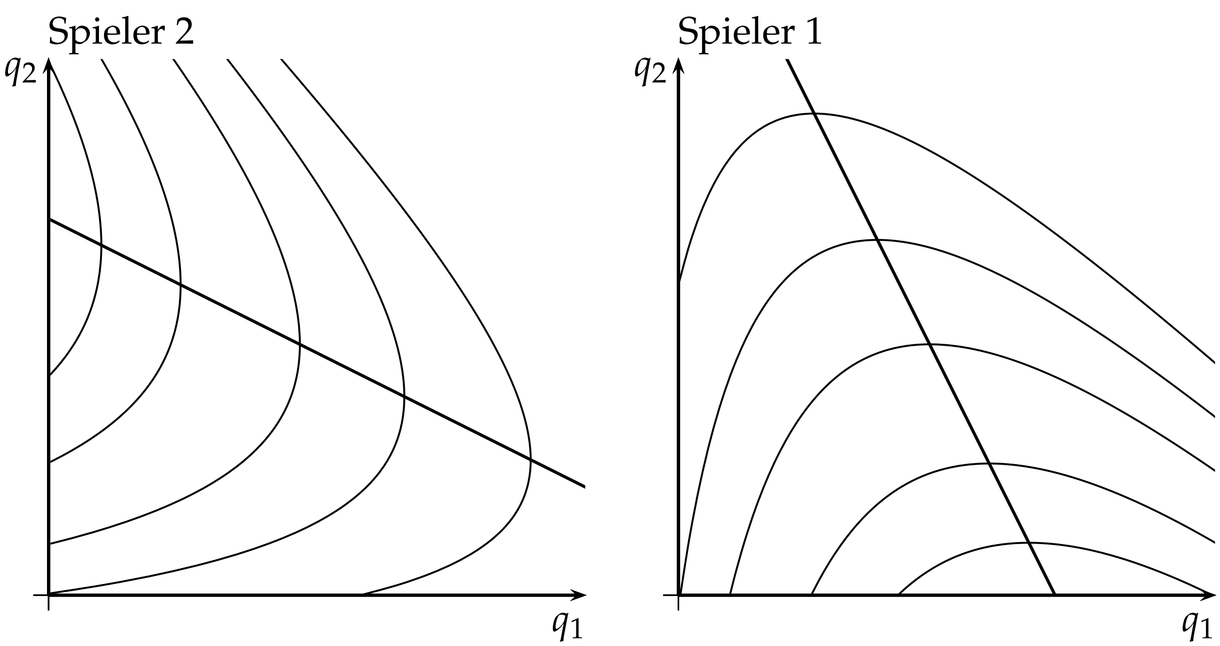
Strategien im Gleichgewicht bei Rückwärtsinduktion:

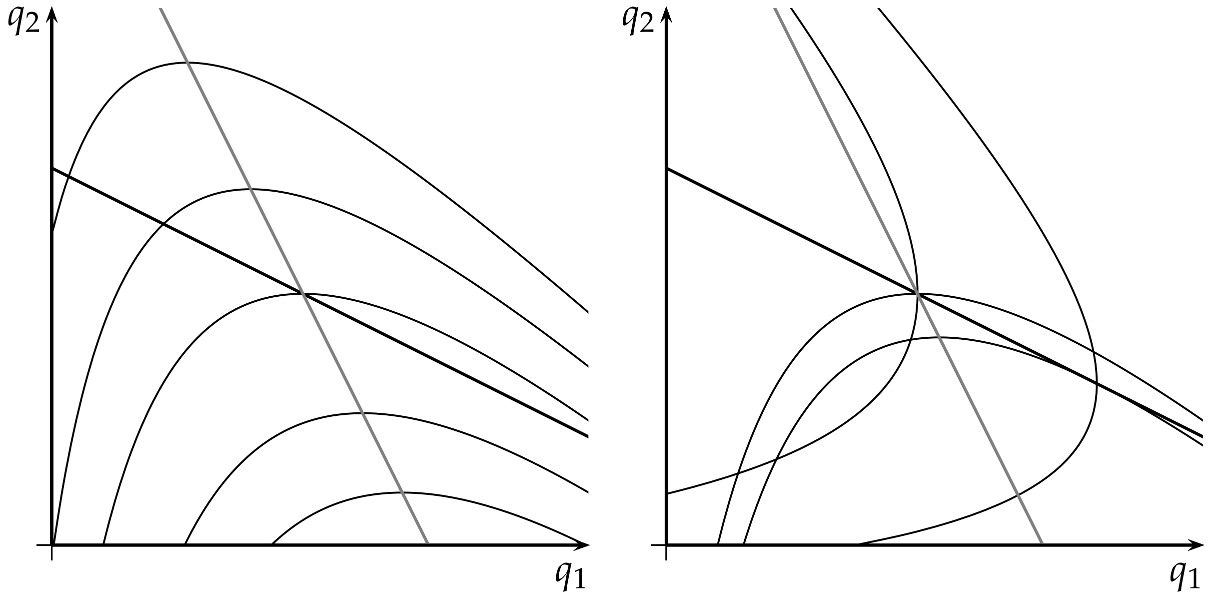
$$q_1^* = \frac{a-c}{2}, \qquad q_2^*(q_1) = \frac{a-q_1-c}{2}$$

Partie im Gleichgewicht bei Rückwärtsinduktion:

$$q_1^* = \frac{a-c}{2}, \qquad q_2^* = \frac{a-c}{4}$$

Beachte: In diesem Stackelberg-Spiel hat Spieler 2 mehr Informationen als Spieler 1. Spieler 2 stellt sich schlechter. Information zu haben ist hier also ein Nachteil.



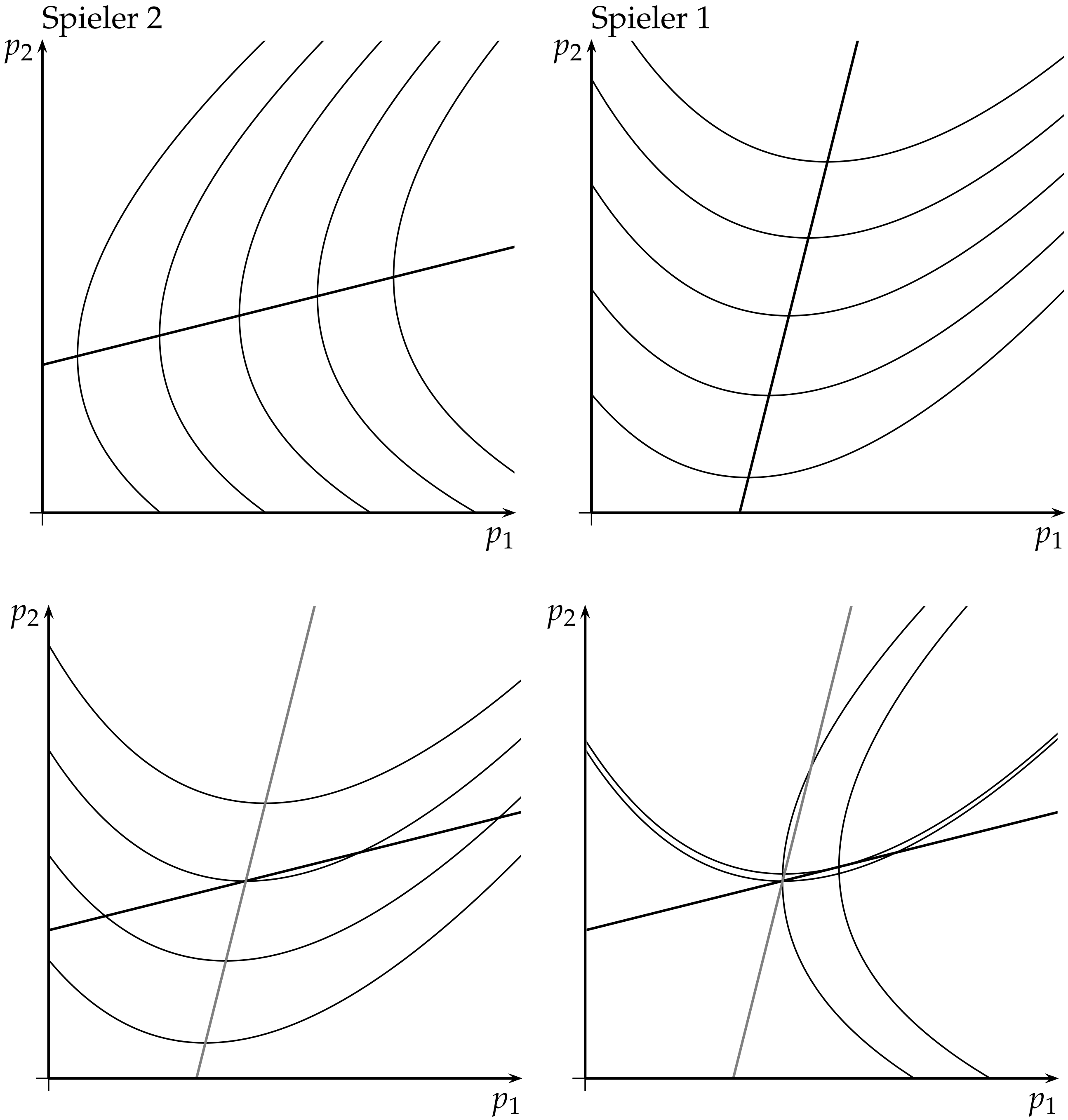


5.9.6 Stackelberg in Preisen

Übung 5.10. Gehen Sie davon aus, dass beide Spieler Preise und nicht Mengen festlegen.

Die Menge, die Firma i absetzen kann, ist $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$.

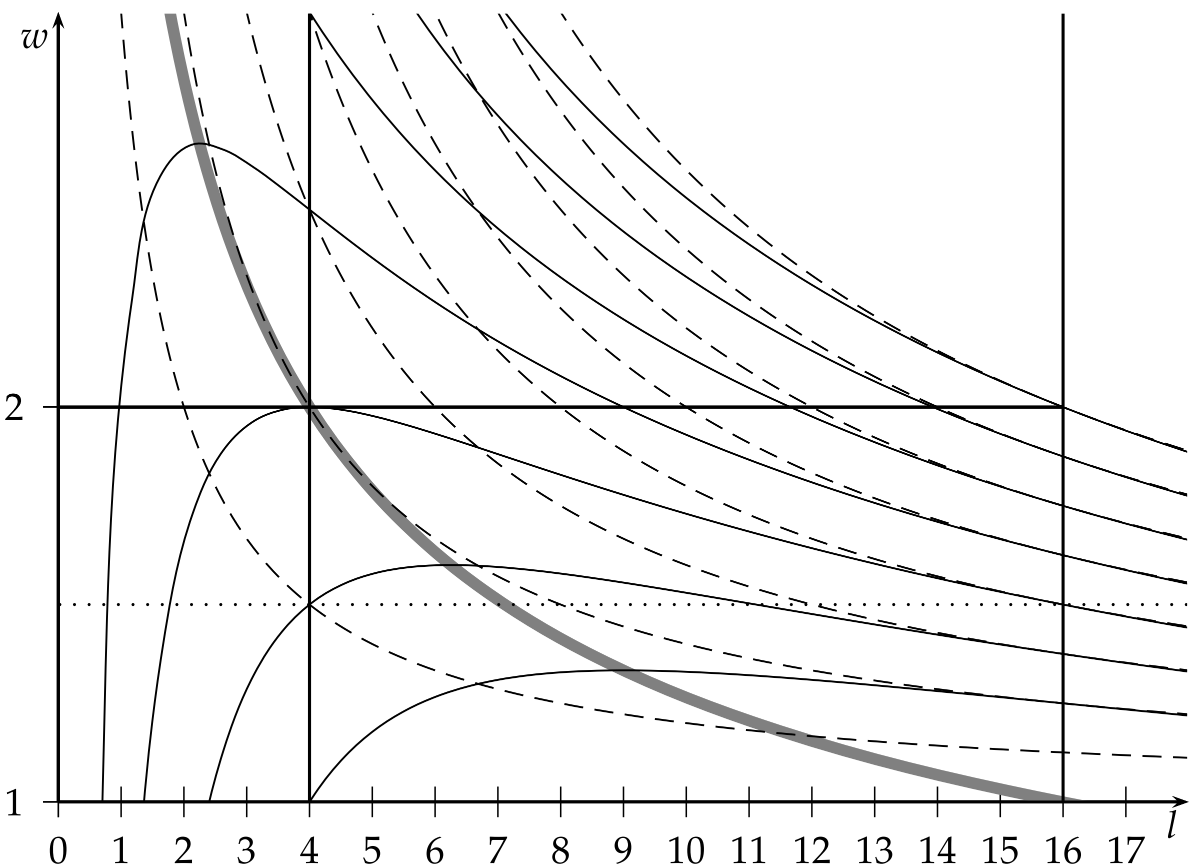
Lösen sie das Spiel mit Rückwärtsinduktion. Welche Strategien ergeben sich im Gleichgewicht? Welche Preise? Welcher der beiden Spieler stellt sich nun besser?



5.10 Löhne und Beschäftigung

Übung 5.11. Eine Firma produziert ein homogenes Gut, das sich in beliebiger Menge zum Preis von 8 € auf dem Markt absetzen lässt. Zur Produktion werden Arbeiter benötigt. Ein Arbeiter kostet w € pro Stunde. In l Stunden Arbeit lassen sich $\sqrt{l}$ Güter produzieren. Jede Stunde Freizeit ist jedem Arbeiter 1 € wert.

1. Wie groß ist der Gewinn der Firma, gegeben w und l?
2. Wie groß ist das Einkommen des Arbeiters am Tag (berücksichtigen Sie dabei die Opportunitätskosten der Arbeit)?
3. Bei welchem Wert von l ist der Gesamtgewinn von Arbeiter und Firma maximal?
4. Nehmen Sie an, dass erst eine Gewerkschaft w festlegt. Die Firma bestimmt danach l. Lösen Sie das Spiel durch Rückwärtsinduktion. Wie groß ist der Gewinn der Firma, das Einkommen des Arbeiters, der Gesamtgewinn?



Übung 5.12. Betrachten Sie weiter Übung 5.11.

Nehmen Sie an, es soll der Gesamtgewinn maximiert werden (wie in Punkt 3.

1. Was ist der maximale Lohn, zu dem die Firma noch Gewinne macht?
2. Was ist der minimale Lohn, zu dem der Arbeiter noch arbeiten will. Nehmen Sie an, dass ein Lohn genau in der Mitte zwischen diesen Extremen ausgehandelt wird.

3. Wieviele Arbeiter möchte die Firma bei diesem Lohn gerne beschäftigen? Vergleichen Sie diese Zahl mit der, die Sie in Übung 5.11 Punkt 3 ermittelt haben. (aus [1, 5.9.15])

5.11 Inspection Game

Beispiel 5.5. Eine skrupellose Firma möchte Schadstoffe in einen Fluss einleiten. Dazu kann sie einen von n Tagen wählen. Eine Umweltorganisation hat die Möglichkeit, an einem dieser Tage eine Schadstoffmessung durchzuführen. Wählt die Umweltorganisation den Tag, an dem die Firma den Fluss verschmutzt, erhält sie eine Auszahlung von 1, und die Firma von -1. Wählt sie einen anderen Tag, hat sie eine Auszahlung von -1 und die Firma von 1.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Rückwärtsinduktion eine Kombination von Gleichgewichtsstrategien. (aus [1, 6.8])

Übung 5.13. Nehmen Sie nun an, dass im Spiel aus Beispiel 5.5 die Umweltorganisation die Möglichkeit hat, an zwei Tagen eine Schadstoffmessung durchzuführen.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Rückwärtsinduktion eine Kombination von Gleichgewichtsstrategien. (aus [1, 6.9.37])

6 Kooperative Spiele

6.1 Definitionen

- Spielermenge: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Koalition: $C \subset N$
- Characteristische Funktion v über N assoziiert zu jeder Koalition C eine reelle Zahl $v(C)$, den Wert der Koalition
- $v(\emptyset) = 0$
- Nutzen ist transferierbar (nicht notwendigerweise vergleichbar)

Definition 17 (Superadditivität)**.** Eine characteristische Funktion v ist superadditiv wenn für jeweils zwei Koalitionen C_1 und C_2 mit $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ gilt

$$v(C_1) + v(C_2) \leq v(C_1 \cup C_2)$$

Beispiel 6.1. $v(1) = 10, v(2) = 20, v(3) = 30$
$v(12) = 40, v(13) = 50, v(23) = 60$
$v(123) = 80$

Definition 18 (Imputation)**.** Eine Imputation eines superadditiven Koalitionsspiels ist eine Aufteilung der Auszahlungen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit

1. individuelle Rationalität $\forall_i : x_i \geq v(i)$
2. kollektive Rationalität $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$

Beispiel 6.2. $v(1) = 10, v(2) = 20, v(3) = 30$
$v(12) = 40, v(13) = 50, v(23) = 60$
$v(123) = 80$
$x = (10, 20, 50)$
$x = (20, 20, 40)$
$\vdots$

Definition 19 (Essentielle characteristische Funktion)**.** Eine superadditive characteristische Funktion v ist essentiell genau dann, wenn $\sum_{i=1}^n v(i) < v(N)$

Beobachtung:

- Es gibt unendlich viele Imputationen für eine essentielle characteristische Funktion.
- Wenn eine superadditive characteristische Funktion v nicht essentiell ist, d.h. $\sum_{i=1}^n v(i) = v(N)$ dann gibt es nur eine Imputation, $x = (v(1), v(2), \ldots, v(n))$.

Beispiel 6.3. $v(1) = 10, v(2) = 20, v(3) = 30$
$v(12) = 30, v(13) = 40, v(23) = 50$
$v(123) = 60$
$x = (10, 20, 30)$

Definition 20 (Dominanz)**.** Eine Aufteilung y dominiert x (d.h. $y \succ x$) genau dann wenn $\exists C \subseteq N$ so dass

1. $\sum_{i=1}^n y_i \leq v(C)$
2. $\forall i \in C : y_i > x_i$

Beobachtung: Dominanz ist **nicht transitiv** d.h. wenn $x \succ y$ und $y \succ z$ muss nicht sein, dass $x \succ z$

Dominanz ist **nicht antisymmetrisch** es kann sein, dass $x \succ y$ und gleichzeitig $y \succ x$.

Beispiel 6.4. $v(1) = v(2) = v(3) = 0$
$v(12) = v(23) = v(13) = 100$
$v(123) = 100.$
$x = (75, 25, 0), y = (0, 75, 25), z = (25, 0, 75)$
$y \succ x, x \succ z, z \succ y$

Beispiel 6.5. $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$
$v(12) = v(34) = v(1234) = 100$
$x = (50, 50, 0, 0), y = (0, 0, 50, 50)$
$x \succ_{34} y$ und $y \succ_{12} x$

Wir leiten eine neue characteristische Funktion v' aus v her mittels der folgenden Äquivalenztransformation:

$$v'(C) = \lambda v(C) + \sum_{i \in C} a_i \qquad \text{wobei } \lambda > 0 \text{ und } a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Satz 10. *Dominanz ist invariant bezüglich Äquivalenztranformationen*

Satz 11 (Normalisierung). *für jede essentielle characteristische Funktion v gibt es eine Äquivalenztransformation v' mit*

- $\forall_i : v'(i) = 0$
- $v'(N) = 1$

Beispiel 6.6.

$$\boxed{\begin{array}{c} v(1) = 10, v(2) = 20, v(3) = 30 \\ v(12) = 40, v(13) = 50, v(23) = 60 \\ v(123) = 80 \end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0 \\ v(12) = 10, v(13) = 10, v(23) = 10 \\ v(123) = 20 \end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0 \\ v(12) = 1/2, v(13) = 1/2, v(23) = 1/2 \\ v(123) = 1 \end{array}}$$

Definition 21 (Kern)**.** Der Kern ist die Menge aller nichtdominierten Imputationen

6.2 Der Kern von nicht-0-1-normalisierten 3 Personen Spielen

Es muss gelten:

$$\begin{array}{lll} x_1 \geq v(1) & x_1 + x_2 \geq v(12) & x_1 + x_2 + x_3 = v(1,2,3) \\ x_2 \geq v(2) & x_1 + x_3 \geq v(13) & \\ x_3 \geq v(3) & x_2 + x_3 \geq v(23) & \end{array}$$

daraus folgt

$$2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \geq v(12) + v(13) + v(23)$$

Bedingung für einen nicht-leeren Kern:

$$\frac{1}{2}\left(v(12) + v(23) + v(13)\right) \leq v(123)$$

Beispiel 6.7. Gibt es eine Allokation im Kern des folgenden Spieles? $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = 100$, $v(13) = 80$, $v(23) = 50$, $v(123) = 120$.

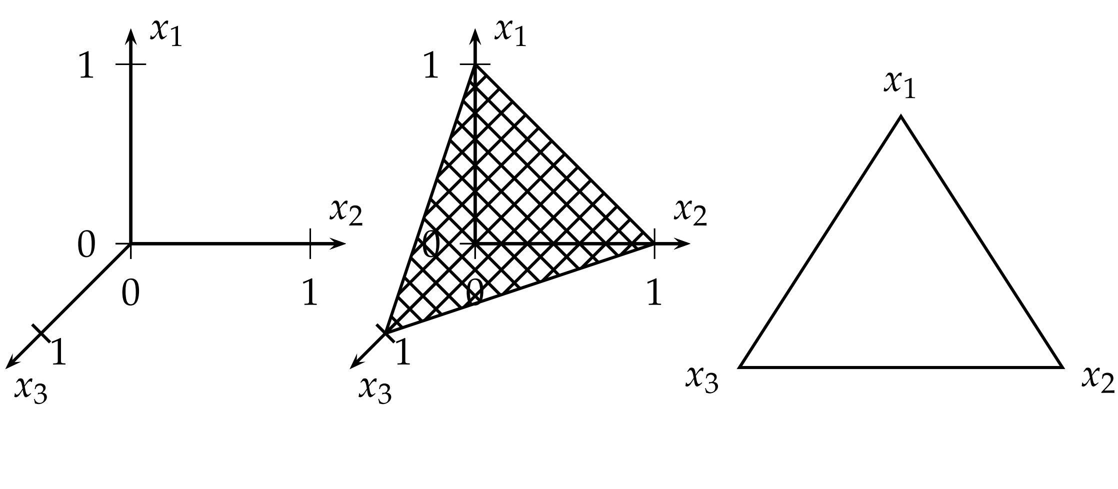
Beispiel 6.8. Gibt es eine Allokation im Kern des folgenden Spieles? $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = 100$, $v(13) = 80$, $v(23) = 70$, $v(123) = 120$.

6.3 Der Kern von 0-1-normalisierten 3 Personen Spielen

$v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(123) = 1$ folgt aus Normalisierung

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq v(12) \leq 1 \\ 0 \leq v(13) \leq 1 \\ 0 \leq v(23) \leq 1 \end{array}\right. \quad \text{folgt aus Superadditivität}$$

Graphische Darstellung

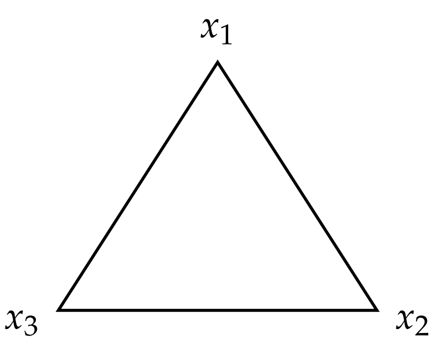


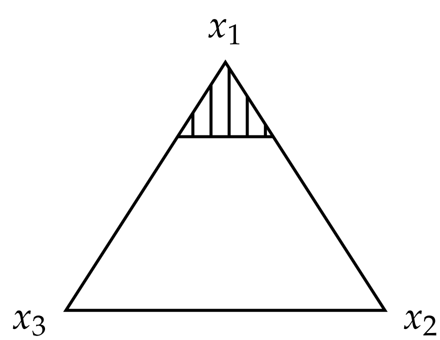
Im nicht-0-1-normalisierten 3 Personen Spiel gilt:

$$
\begin{array}{lll}
x_1 \geq v(1) & x_1 + x_2 \geq v(12) & x_1 + x_2 + x_3 = v(1,2,3) \\
x_2 \geq v(2) & x_1 + x_3 \geq v(13) & \\
x_3 \geq v(3) & x_2 + x_3 \geq v(23) &
\end{array}
$$

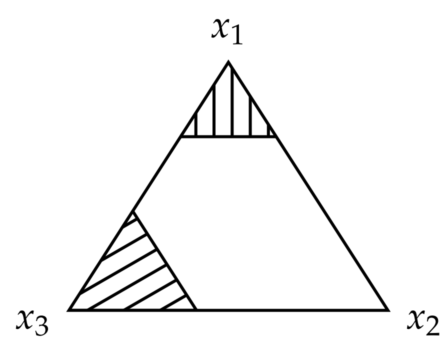
Also gilt im 0-1-normalisierten 3 Personen Spiel:

$$
\begin{array}{l}
x_3 \leq 1 - v(12) \\
x_2 \leq 1 - v(13) \\
x_1 \leq 1 - v(23)
\end{array}
$$



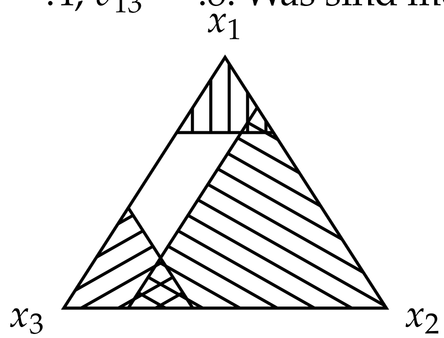


$v(23) = 0.3$

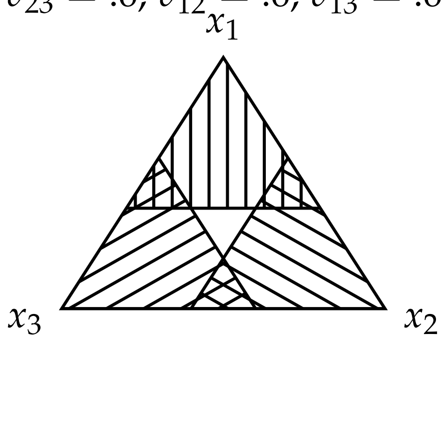


$v(23) = 0.3, v(12) = 0.4$

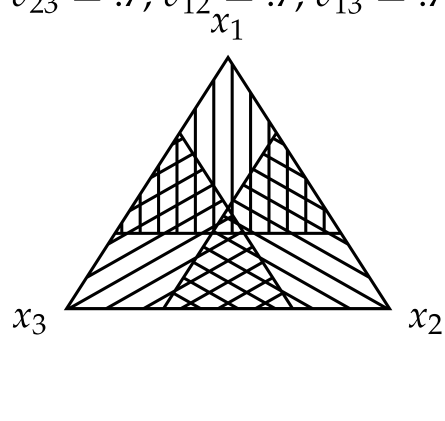
Annahme: $v_{23} = .3$, $v_{12} = .4$, $v_{13} = .8$. Was sind mögliche Imputationen?



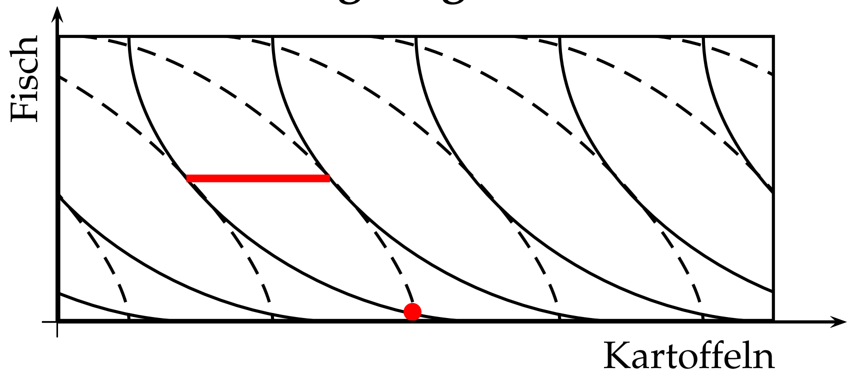
$v_{23} = .6, v_{12} = .6, v_{13} = .6$



$v_{23} = .7, v_{12} = .7, v_{13} = .7$



6.4 Anwendung: Edgeworth box

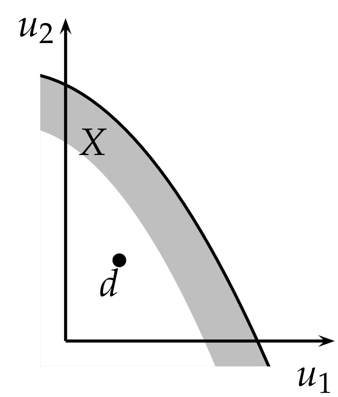


7 Verhandlungen

7.1 Die Nash Verhandlungslösung

Ein Nash Verhandlungsproblem wird beschrieben durch ein Paar (X, d).

- $X \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Menge von möglichen Auszahlungen
  - X ist konvex
  - X ist kompakt
- $d = (d_1, d_2) \in X$ ist der „disagreement Point“



Wir interpretieren Elemente von X als Kombinationen von Nutzen.

7.1.1 Axiome für die Nash-Verhandlungslösung

- Pareto-Effizienz

  Die Verhandlungslösung soll auf dem Pareto-effizienten Rand der Menge X liegen.

- Symmetrie

  In einer symmetrischen Verhandlungssituation sollen auch beide dasselbe bekommen.

- Unabhängig von der Skalierung der Nutzenfunktion

  Es soll sich nichts ändern, wenn die Nutzenfunktion eines oder beider Spieler plötzlich in eine andere Währung transformiert wird.

- Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

  Beispiel: Eva und Maria sitzen im Café und wollen gemeinsam ein Stück Kuchen bestellen (mit zwei Gabeln). Zur Auswahl steht Schokoladenkuchen, Apfelkuchen und Kirschstreusel. Nachdem sie sich auf Schokoladenkuchen geeinigt haben, erfahren sie, dass es keinen Kirschstreusel mehr gibt. Wenn sie daraufhin ihre Wahl ändern, verstoßen sie gegen das Axiom der irrelevanten Alternativen.

Wir suchen nun eine Verhandlungslösung, die für alle oben erlaubten Verhandlungsprobleme die obigen Axiome erfüllt.

Satz 12. *Es gibt genau eine Lösung, die stets die obigen Axiome erfüllt, und zwar*

$$(x_1, x_2) = \underset{(x_1,x_2)\in X^{>d}}{\operatorname{argmax}} (x_1 - d_1) \cdot (x_2 - d_2)$$

Beispiel 7.1. Beweisen Sie diesen Satz.

Übung 7.1. Eva und Maria teilen einen Kuchen. Wenn Sie sich nicht einigen können, verschwindet der Kuchen. Der Kuchen habe die Größe 1. Eva erhält einen Anteil x_e, Maria einen Anteil x_m. Nehmen Sie an, dass Eva eine Nutzenfunktion $u_e(x_e) = x^\eta$ hat. Maria hat eine Nutzenfunktion $u_m(x_m) = x^\mu$. Es gilt $0 < \mu < \eta < 1$. Was ist die Nash Verhandlungslösung? Wer von beiden bekommt mehr?

Übung 7.2. Finden Sie zwei Verhandlungsprobleme (X, d) und (Y, d), mit $Y \subseteq X$ so dass mit der Nash Verhandlungslösung von (Y, d) Spieler 2 mehr erhält, als bei (X, d). (aus [1, 5.9.18])

Übung 7.3. Eva und Maria können den Nachmittag damit verbringen, gemeinsam 5 kg Kirschen zu ernten. Das setzt voraus, dass sie sich vorher einigen, wie sie die 5 kg aufteilen. Wenn sie sich nicht einigen, können sie auch alleine ernten. Da es Skaleneffekte gibt, bekommen sie dann aber weniger: Eva nur 2 kg, Maria nur 1 kg.

- Nehmen Sie an, dass Eva und Maria linearen Nutzen in Kirschen haben und bestimmen Sie die Nash Verhandlungslösung.

- Nehmen Sie nun an, dass im obigen Fall die Transportkapazitäten von Eva beschränkt sind. Mehr als 2.5 kg kann sie nicht mitnehmen. Die Transportkapazitäten von Maria sind nicht beschränkt. Ändert sich nun die Nash Verhandlungslösung?

Übung 7.4. Eva und Maria spielen das folgende Spiel:

		Maria		
		c	d	e
Eva	A	5, 3	12, 0	2, 2
	B	6, 0	6, 2	9, 1

Eva und Maria haben die Möglichkeit, vor dem Spiel eine Vereinbarung zu treffen, wie sie den Gewinn nach dem Spiel aufteilen. Es ist also möglich, dass Eva einen Teil ihrer Auszahlung an Maria abgibt, oder umgekehrt. Wenn sie keine Vereinbarung treffen, erhalten sie nur die Auszahlungen des Spiels.

- Bestimmen Sie die Nash Verhandlungslösung.

Übung 7.5.

- Nehmen Sie nun an, Eva und Maria könnten sich, bevor die Verhandlungen geführt werden, unwiderruflich auf eine gemischte Strategie festlegen. Danach werden sie sich auf die Nash Verhandlungslösung einigen, die durch diesen Drohpunkt festgelegt wurde. Was ist nun ein Nash Gleichgewicht?

(aus [1, 6.9])

Übung 7.6. Erinnern Sie sich daran, dass das Spiel in Übung 4.7 sehr viele Nash Gleichgewicht hatte. Nehmen Sie nun an, dass Unsicherheit über die Größe des Kuchens besteht. Sowohl Eva als auch Maria halten jede Größe des Kuches zwischen 0 und 1 für gleichwahrscheinlich. Was ist nun ein Nash Gleichgewicht.

7.2 Strategische Verhandungsmodelle

7.2.1 Vergleich Nash/Rubinstein

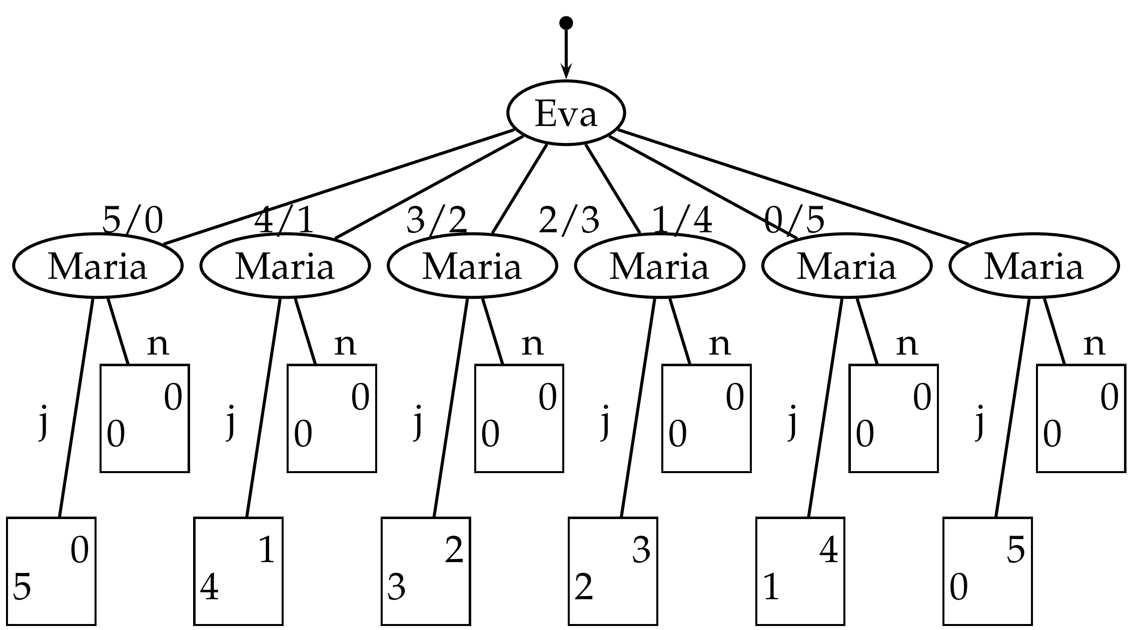
Modellierung eines Verhandlungsproblems:

Axiomatisch, bei der Nash Verhandlungslösung	Strategisch, im Rubinstein Verhandlungsspiel
• Pareto-Effizienz • Symmetrie • Unabhängig von der Skalierung der Nutzenfunktion • Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen	• Lösung wird bestimmt durch Kosten, die beiden Spielern bei den Verhandlungen entstehen.

Beispiel: Eva und Maria gehen ins Kino. Eva kauft eine Schachtel mit 5 Stück Eiskonfekt. Sie entscheidet, wieviel sie Maria abgibt. Wieviel wird sie an Maria abgeben?

7.2.2 Ultimatumspiel

Eva und Maria gehen ins Kino. Eva kauft eine Schachtel mit 5 Stück Eiskonfekt. Sie entscheidet, wieviel sie Maria abgibt. Maria entscheidet, ob sie einverstanden ist oder nicht. Wenn sie einverstanden ist, werden die 5 Stück Eiskonfekt aufgeteilt, wie Eva vorgeschlagen hat. Ansonsten schmilzt das Eis.



Es gibt zwei Gleichgewichte:

- Maria ist einverstanden, egal was Eva anbietet, und Eva bietet ihr nichts an.
- Maria ist einverstanden, außer wenn sie gar nichts bekommt, und Eva bietet ihr genau ein Stück Konfekt an.

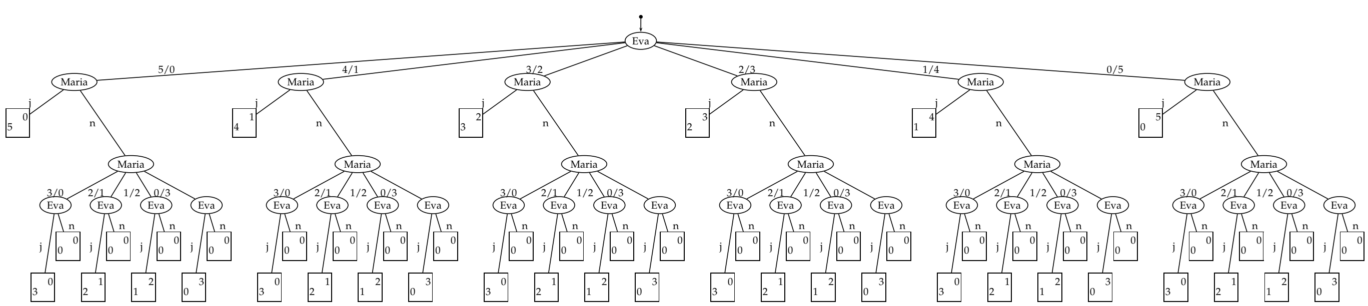
Auszahlung bei diesen beiden Gleichgewichten ist $\boxed{{}_{5}\quad{}^{0}}$ und $\boxed{{}_{4}\quad{}^{1}}$.

7.2.3 Mini Rubinstein

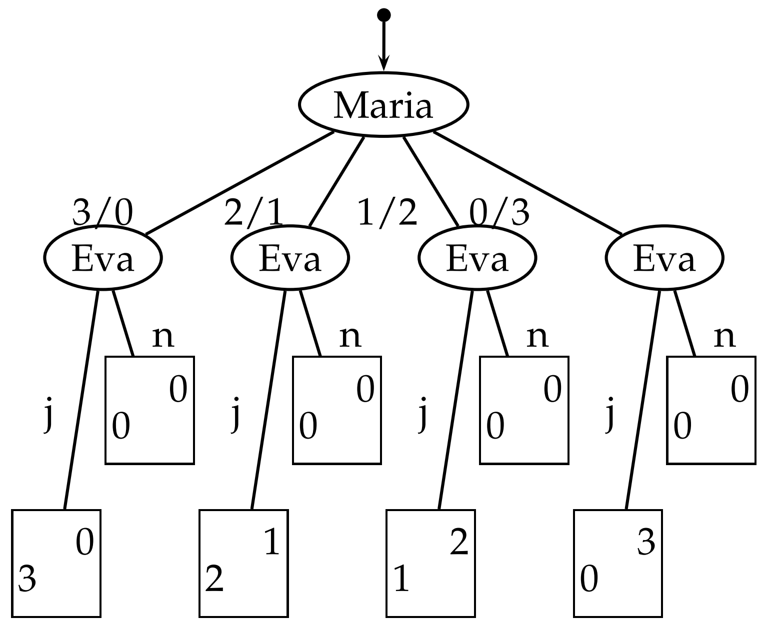
Eva und Maria gehen ins Kino. Eva kauft eine Schachtel mit 5 Stück Eiskonfekt. Sie entscheidet, wieviel sie Maria abgibt. Maria entscheidet, ob sie einverstanden ist oder nicht. Wenn sie einverstanden ist, werden die 5 Stück Eiskonfekt aufgeteilt, wie Eva vorgeschlagen hat.

Wenn sie nicht einverstanden ist, sind in der Zwischenzeit bereits 2 Stück Eiskonfekt geschmolzen. Die verbleibenden 3 Stück Eiskonfekt darf Maria aufteilen. Wenn Eva mit Marias Aufteilung einverstanden ist, werden die 3 Stück Eiskonfekt geteilt wie Maria vorgeschlagen hat. Wenn Eva nicht einverstanden ist, schmilzt auch der Rest.

Das vollständige Spiel ist recht groß:



Wir untersuchen deshalb einstweilen nur ein Teilspiel:

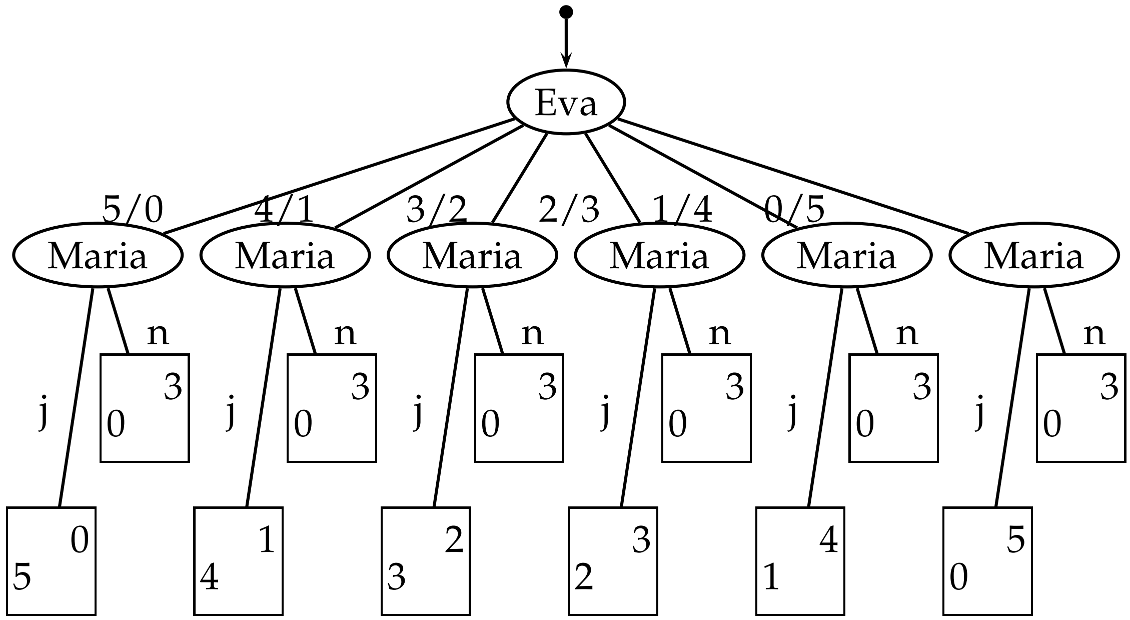


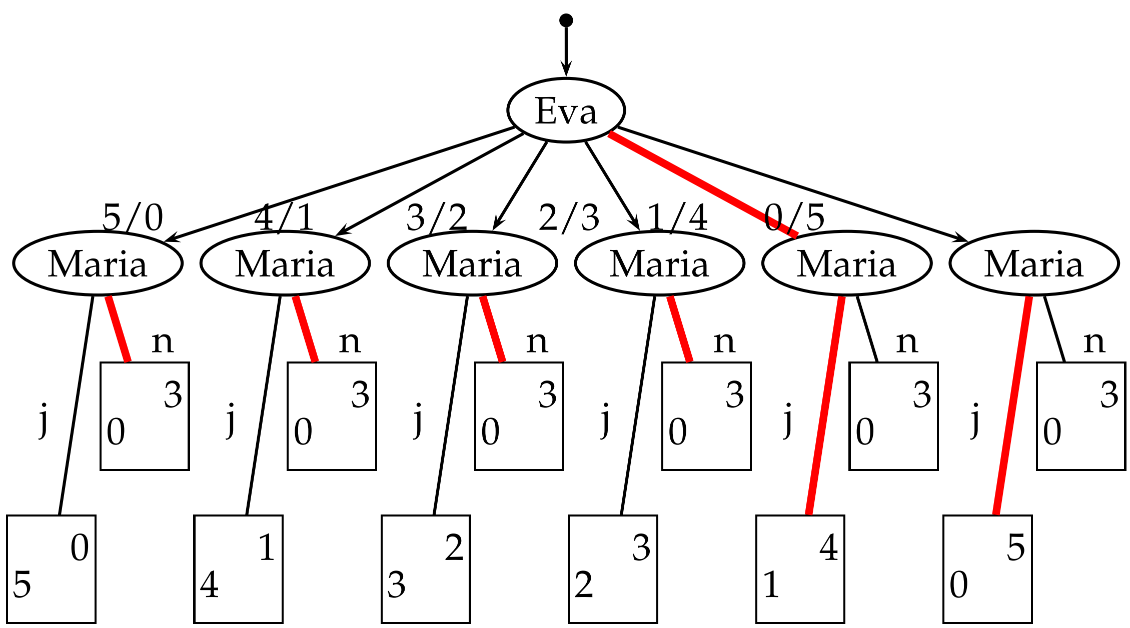
In diesem Teilspiel gibt es zwei Gleichgewichte:

- Eva ist einverstanden, egal was Maria anbietet, und Maria bietet ihr nichts an.
- Eva ist einverstanden, außer wenn sie gar nichts bekommt, und Maria bietet ihr genau ein Stück Konfekt an.

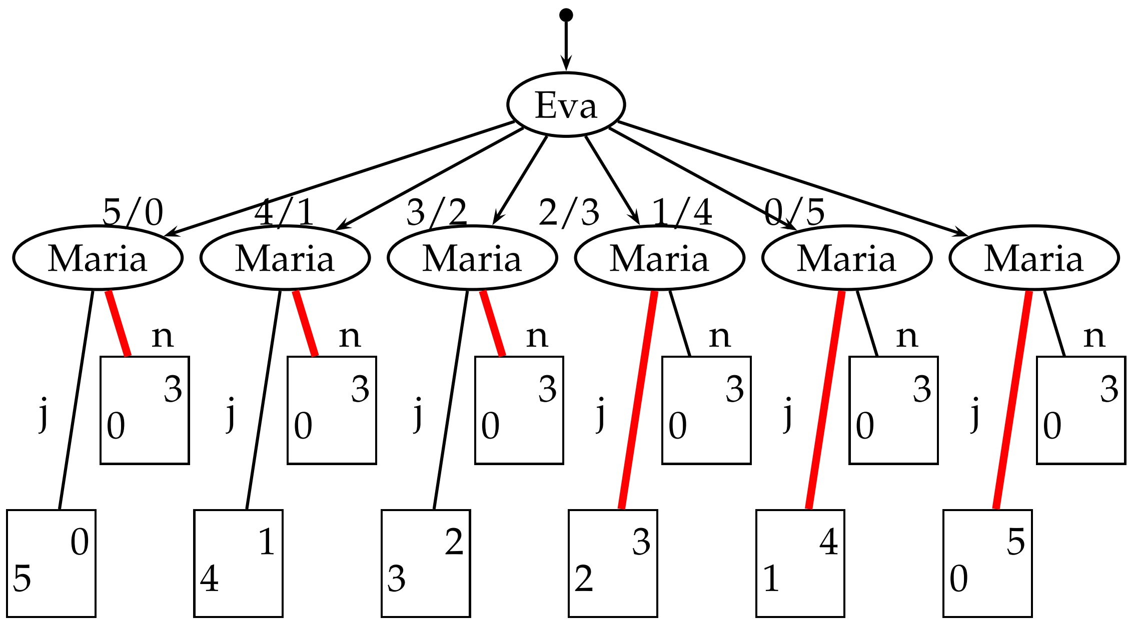
Die Gleichgewichte im Teilspiel können wir z.B. wie folgt aufschreiben:
$0/3; j, j, j, j$ und $1/2; j, j, j, n$
Nehmen wir nun an, dass stets, wenn Maria ein Angebot macht, $0/3; j, j, j, j$

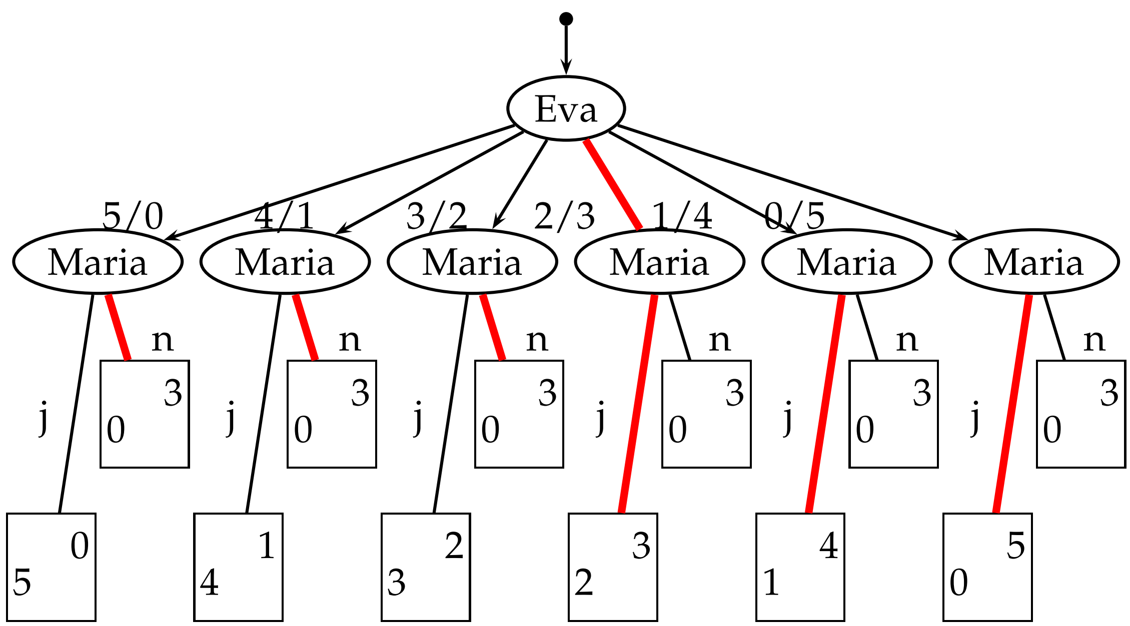
gespielt wird.



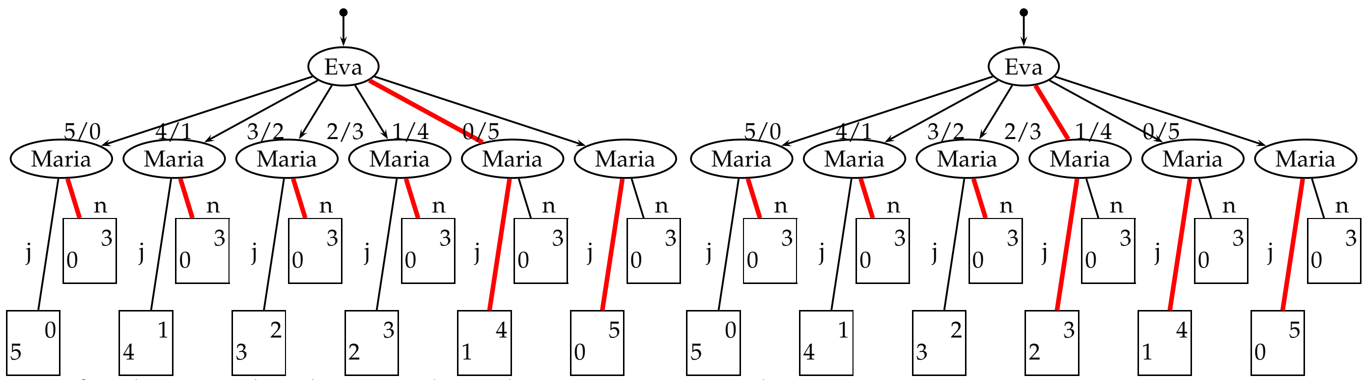


$1/4$, $j, j, j, j,\ j, j, j, j,\ j, j, j, j,\ j, j, j, j,\ j, j, j, j,\ j, j, j, j; n, n, n, n, j, j, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3$





$2/3, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j, j; n, n, n, j, j, j, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3$



Wir finden 2 Gleichgewichte des Gesamtspiels:

$2/3, j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3$
$1/4, j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,n,j,j, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3$

Nehmen wir nun an, dass stets, wenn Maria ein Angebot macht, $1/2; j,j,j,n$ gespielt wird.

Bislang haben wir also vier Gleichgewichte gefunden:

$3/2, j,j,j,n,\ j,j,j,n,\ j,j,j,n,\ j,j,j,n,\ j,j,j,n,\ j,j,j,n;\ n,n,j,j,j,j, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2$
$2/3, j,j,j,n,\ j,j,j,n,\ j,j,j,n,\ j,j,j,n,\ j,j,j,n,\ j,j,j,n; n,n,n,j,j,j, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2$
$2/3, j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3$
$1/4, j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,n,j,j, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3, 0/3$

Es gibt aber noch viel mehr. Oben haben wir vereinfachend angenommen, dass in allen Teilspielen, in denen Maria ein Angebot macht, immer dasselbe Gleichgewicht des Teilspiels gespielt wird. Entweder immer $0/3; j,j,j,j$ oder immer $1/2; j,j,j,n$. Das muss aber nicht sein. Man sieht leicht, dass es unerheblich ist, welches Gleichgewicht des Teilspiels in den Teilspielen nach 5/0, 4/1, 1/4, 0/5 gespielt wird. Aus einem jeden der obigen vier Gleichgewichte erhalten wir die folgenden 16 Varianten (hier nur ein Beispiel):

$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3,0/3,0/3,0/3,0/3,0/3$
$2/3,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 1/2,0/3,0/3,0/3,0/3,0/3$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3,1/2,0/3,0/3,0/3,0/3$
$2/3,\ j,j,j,n,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 1/2,1/2,0/3,0/3,0/3,0/3$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3,0/3,0/3,0/3,1/2,0/3$
$2/3,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 1/2,0/3,0/3,0/3,1/2,0/3$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3,1/2,0/3,0/3,1/2,0/3$
$2/3,\ j,j,j,n,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 1/2,1/2,0/3,0/3,1/2,0/3$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n; n,n,n,j,j,j, 0/3,0/3,0/3,0/3,0/3,1/2$
$2/3,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n; n,n,n,j,j,j, 1/2,0/3,0/3,0/3,0/3,1/2$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n; n,n,n,j,j,j, 0/3,1/2,0/3,0/3,0/3,1/2$
$2/3,\ j,j,j,n,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n; n,n,n,j,j,j, 1/2,1/2,0/3,0/3,0/3,1/2$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ n,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3,0/3,0/3,0/3,1/2,1/2$
$2/3,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ n,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 1/2,0/3,0/3,0/3,1/2,1/2$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ n,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3,1/2,0/3,0/3,1/2,1/2$
$2/3,\ j,j,j,n,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,n,\ n,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 1/2,1/2,0/3,0/3,1/2,1/2$

Genauso kann man aus den anderen drei Gleichgewichten jeweils weitere 15 Varianten ableiten. Schließlich ist es möglich, auch die Teilspiele nach 3/2 und 2/3 zu betrachten. Dort haben wir oben entweder immer $0/3; j,j,j,j$ oder immer $1/2; n,j,j,j$ angenommen. Das muss auch nicht sein. Die folgende Tabelle listet Gleichgewichte auf, in denen sich die Züge in den Teilspielen nach 3/2 und 2/3 unterscheiden. Aus jedem Gleichgewicht lassen sich wie oben weitere 15 Varianten ableiten.

$3/2,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,j,j,j,j, 0/3,0/3,1/2,0/3,0/3,0/3\ ;$
$3/2,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,j,n,j,j, 0/3,0/3,1/2,0/3,0/3,0/3;$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3,0/3,1/2,0/3,0/3,0/3;$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,n,j,j, 0/3,0/3,1/2,0/3,0/3,0/3;$
$3/2,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,n,j,j, 0/3,0/3,1/2,0/3,0/3,0/3;$
$2/3,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j,\ n,j,j,j,\ j,j,j,j,\ j,j,j,j; n,n,n,j,j,j, 0/3,0/3,0/3,1/2,0/3,0/3;$

Alle Gleichgewichte führen aber zu einer der drei folgenden Auszahlungen:

1 4	2 3	3 2

Beispiel 7.2. Gehen Sie nun davon aus, dass in der Schachtel 100 Stück Eiskonfekt sind. Falls sich Eva und Maria in der ersten Stufe nicht einigen sind in der zweiten Stufe noch 60 übrig. Was sind jetzt die Gleichgewichte?

7.2.4 Rubinstein Verhandlungsspiel

Eva und Maria verhandeln nun um einen Kuchen. Der Kuchen wird im Laufe der Zeit immer kleiner. Zum Zeitpunkt t ist seine Größe δ^t. Wir nehmen an, dass der Diskontfaktor δ sehr nahe bei eins ist, der Kuchen also recht langsam schrumpft.

In der ersten Stufe ($t = 0$) macht Eva einen Vorschlag für eine Aufteilung. Maria kann zustimmen oder ablehnen. Wenn sie ablehnt, macht in der nächsten Stufe ($t = 1$) Maria einen Vorschlag. Den kann wiederum Eva annehmen oder ablehnen. Wenn sie ablehnt, macht Eva in der folgenden Stufe ($t = 2$) einen Vorschlag dem Maria zustimmen oder nicht zustimmen kann…

Wir beginnen die Lösung dieses Spiels in einem Teilspiel das weit in der Zukunft liegt. Nennen wir die Periode t und nehmen wir an, es ist eine gerade Periode, d.h. eine Periode in der Eva einen Vorschlag macht. Wir wissen nicht genau, wieviele Gleichgewichte es in diesem Teilspiel gibt, wir wissen aber, dass Eva maximal den ganzen Kuchen bekommen kann, und minimal gar nichts. Nenne das Supremum des Anteils den Eva im Gleichgewicht in Periode t bekommen kann S und das Infimum s.

		Anteil Eva		Anteil Maria	
	Kuchen	inf	sup	inf	sup
t	δ^t	s	S		
$t-1$	δ^{t-1}	δs	δS	$1-\delta S$	$1-\delta s$
$t-2$	δ^{t-2}	$1-\delta+\delta^2 s$	$1-\delta+\delta^2 S$	$\delta-\delta^2 S$	$\delta-\delta^2 s$
$t-3$	δ^{t-3}	$\delta-\delta^2+\delta^3 s$	$\delta-\delta^2+\delta^3 S$	$1-\delta+\delta^2-\delta^3 S$	$1-\delta+\delta^2-\delta^3 s$
$t-4$	δ^{t-4}	$1-\delta+\delta^2-\delta^3+\delta^4 s$	$1-\delta+\delta^2-\delta^3+\delta^4 S$	$\delta-\delta^2+\delta^3-\delta^4 S$	$\delta-\delta^2+\delta^3-\delta^4 s$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Allgemein: Wenn wir $2n$ Perioden zurückgehen, dann erhält Eva einen Anteil zwischen

$$1-\delta+\delta^2-\delta^3+\delta^4-\ldots-\delta^{2n-1}+\delta^{2n}s$$

und

$$1-\delta+\delta^2-\delta^3+\delta^4-\ldots-\delta^{2n-1}+\delta^{2n}S$$

Wir sehen, der Einfluss von s und S wird immer unerheblicher. Wenn wir t nur groß genug wählen wird der Unterschied zwischen den beiden Grenzen beliebig klein und im Grenzwert erhält Eva

$$1-\delta+\delta^2-\delta^3+\delta^4-\ldots=\frac{1}{1+\delta}$$

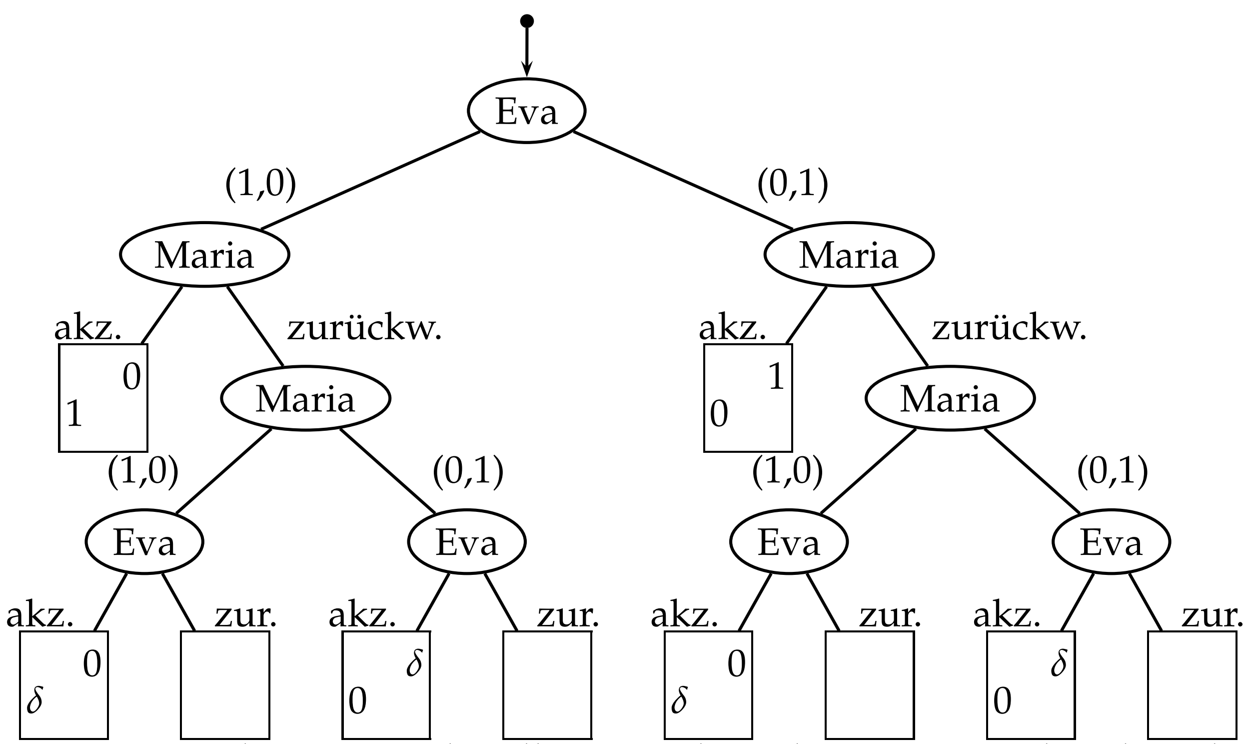
und Maria

$$\frac{\delta}{1+\delta}$$

Beispiel 7.3. Nehmen Sie an, dass im obigen Rubinstein Verhandlungsspiel der Kuchen nicht zerschnitten werden kann. Es ist nur möglich, den Kuchen ganz an Eva oder ganz an Maria zu geben. Wenn sich die Parteien nie einigen, ist die Auszahlung 0.

- Zeigen Sie, dass es ein Gleichgewicht gibt, in dem Eva in der ersten Runde den ganzen Kuchen bekommt.
- Zeigen Sie, dass es ein Gleichgewicht gibt, in dem Maria in der ersten Runde den ganzen Kuchen bekommt.
- Zeigen Sie, dass es ein Gleichgewicht gibt, in dem sich Eva und Maria nicht in der ersten Runde einigen. (aus [1, 5.9.26])

Partie: Eva: (1,0); Maria: akz.



In einem Rubinstein-Verhandlungsspiel machen zwei Spieler abwechselnd einen Vorschlag, wie ein „schrumpfender Kuchen“ aufzuteilen ist. Erst macht Spieler 1 einen Vorschlag, dann Spieler 2, dann wieder Spieler 1, usw. Es sind nur Vorschläge erlaubt, bei denen entweder einer der Spieler den gesamten Kuchen bekommt, oder bei denen der Kuchen zu gleichen Teilen aufgeteilt wird. Die zulässigen Vorschläge sind also $(0,1)$, $(1,0)$ und $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Die erste Zahl gibt stets den Anteil von Spieler 1, die zweite Zahl stets den Anteil von Spieler 2 an. Benutzen Sie bitte für die Lösung diese Notation um Vorschläge (Züge) zu beschreiben.

Der Kuchen schrumpft mit einem Diskontfaktor $\delta < 1$. Nehmen Sie an, dass δ nahe bei 1 liegt.

Übung 7.7.

1. Welche der obigen drei Aufteilungen können in einem Gleichgewicht in reinen Strategien (das Sie per Rückwärtsinduktion finden) resultieren in welchem sich die Spieler sofort einigen (sofort heißt, dass in der ersten Periode Spieler 1 einen Vorschlag macht und Spieler 2 ihn annimmt)?

   Geben Sie für jede dieser Auszahlungen ein Beispiel für ein Gleichgewicht (das Sie per Rückwärtsinduktion finden), das sofort zu dieser Auszahlung führt.

2. Finden Sie ein Gleichgewicht (per Rückwärtsinduktion) in dem **keine** Einigung in der ersten Periode erfolgt!

In einem modifizierten Rubinstein-Verhandlungsspiel soll ein Dollar aufgeteilt werden. In Periode 1 macht Spieler 1 einen Vorschlag. Falls das Spiel nicht in dieser Periode endet, macht in Periode 2 Spieler 2 einen Vorschlag. Falls das Spiel nicht endet, macht dann in Periode 3 wieder Spieler 1 einen Vorschlag,...

Wenn Spieler i einen Vorschlag $(x_i, 1-x_i)$ macht, wie der Dollar aufgeteilt werden soll, dann hat der andere Spieler (nennen wir ihn j) drei Möglichkeiten:

- Spieler j kann den Vorschlag annehmen. In diesem Fall endet das Spiel, Spieler 1 erhält x_i, und Spieler 2 erhält $1-x_i$.
- Spieler j kann eine "outside-option" wählen. In dem Fall endet das Spiel, Spieler j bekommt x_0, Spieler i bekommt nichts.
- Spieler j kann nichts tun. Dann geht das Spiel in der nächsten Periode weiter. In dieser Periode macht nun Spieler j einen Vorschlag wie oben, Spieler i kann diesen Vorschlag annehmen, oder die "outside-option" wählen, oder nichts tun...

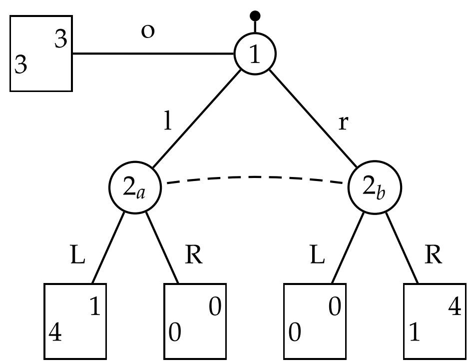
Der Diskontfaktor $\delta \in (0,1)$ ist für beide Spieler gleich.
Nehmen Sie an, dass $x_0 < \delta/(1+\delta)$ (für beide Spieler gleich).

Übung 7.8. Welche Gleichgewichte finden Sie per Rückwärtsinduktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

8 Spiele mit unvollständiger Information

8.1 Informationsbezirke

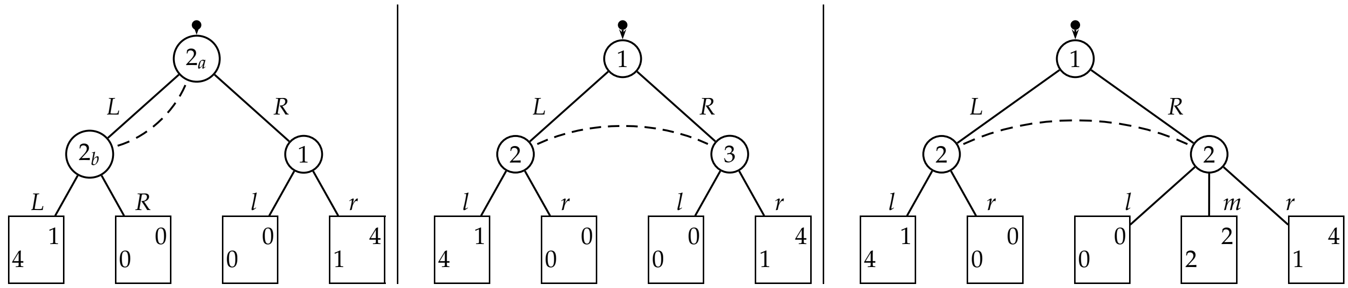
Bislang haben wir stets angenommen, dass auf jeder Stufe des Spiels alle vorangegangenen Züge bekannt waren. Im folgenden Spiel aber weiß Spieler 2 nicht, was Spieler 1 im ersten Zug gemacht hat. Er weiß nicht, ob er sich im Knoten 2_a oder 2_b befindet. Wir sagen, die beiden Knoten befinden sich in einem Informationsbezirk und stellen das graphisch dar, indem beide Knoten mit einer gestrichelten Linie verbunden werden.



8.2 Eigenschaften von Informationsbezirken

- In allen Knoten eines Informationsbezirkes ist immer derselbe Spieler am Zug.
- In allen Knoten eines Informationsbezirkes stehen die gleichen Züge zur Auswahl.
- 'perfect recall': Jeder Spieler kann sich zu jedem Zeitpunkt daran erinnern, welche Informationsbezirke er bislang erreicht hat, und welche Entscheidungen dort getroffen wurden.

Die folgende Spiele sind also nicht erlaubt (können wir nicht als Spiele interpretieren):

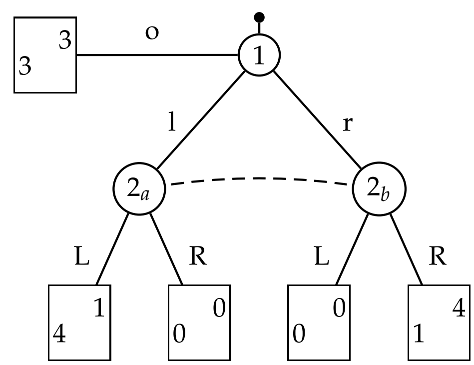


8.3 Teilspiele

Definition 22 (Teilspiel)**.** In einem Spiel mit vollständiger Information (jeder Knoten ist sein eigener Informationsbezirk) ist jeder Knoten der Anfang eines neuen Teilspiels.

In einem Spiel mit unvollständiger Information ist jeder Knoten nur dann der Anfang eines neuen Teilspiels wenn dieses Teilspiel alle Informationsbezirke auch vollständig enthält.

Die Knoten 2_a und 2_b im Beispiel beginnen also kein Teilspiel, weil die Teilbäume jeweils nur einen Teil eines Informationsbezirks enthalten.
Der Knoten 1 beginnt ein Teilspiel, weil alle Informationsbezirke vollständig enthalten sind



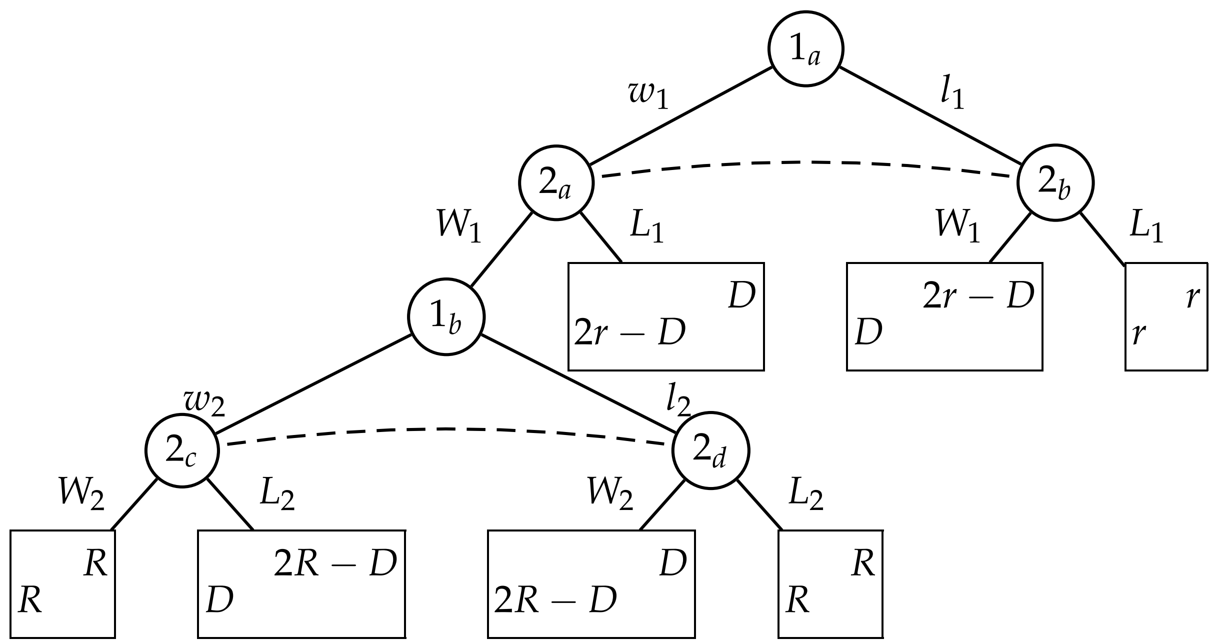
8.4 Teilspielperfektes Gleichgewicht

Definition 23 (teilspielperfektes Gleichgewicht)**.** Eine Kombination von gemischten Strategien ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn sie in jedem Teilspiel ein Nash Gleichgewicht induziert.

Satz 13. *In einem endlichen Spiel existiert immer ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

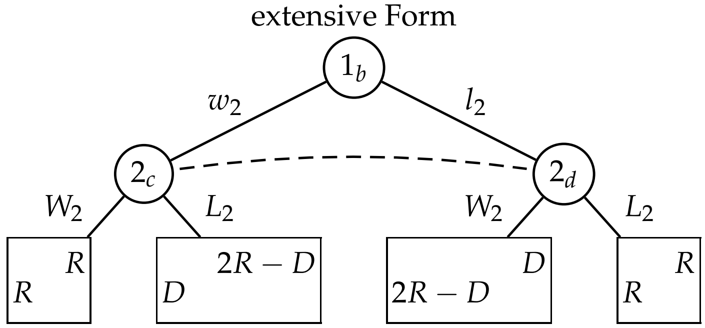
8.5 Bank runs

Beispiel 8.1. Eva und Maria investieren Geld in ein Projekt. Jede legt einen Betrag von D an. Nach einem Jahr wird das Projekt $2r < 2D$ wert sein (ist also nicht profitabel). Nach zwei Jahren ist es $2R > 2D$ wert (ist also profitabel). Jede von beiden hat das Recht das Projekt jedederzeit zu liquidieren. Wenn beide gleichzeitig beschließen zu liquidieren, wird der Erlös gleichmäßig aufgeteilt. Wenn nur eine liquidieren will, bekommt sie im ersten Jahr ihre gesamte Investition D zurück, im zweiten Jahr den gesamten Erlös abzüglich der Investition der anderen $2R - D$. Die andere bekommt jeweils den Rest $(2r - D)$ im ersten Jahr, D im zweiten Jahr)



Betrachte zunächst nur das Teilspiel das im Knoten 1_b beginnt.

extensive Form



Normalform

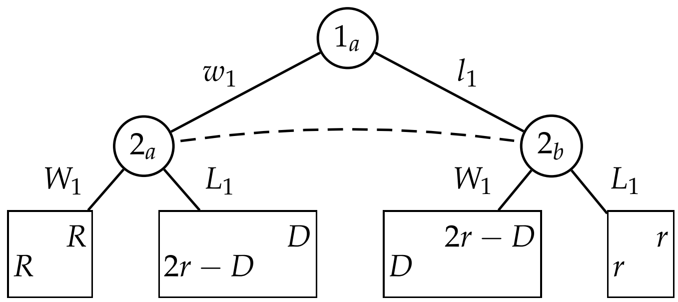
Maria (2)

Eva (1)	W_2	L_2
w_2	R, R	D, $2R - D$
l_2	$2R - D$, D	R, R

Wir können das Teilspiel durch wiederholte Elimination strikt dominierter Strategien vereinfachen. Es gibt nur ein Nash Gleichgewicht: $\{l_2, L_2\}$. Dieses Nash Gleichgewicht führt zur Auszahlung (R, R) im Teilspiel.

Betrachte nun das Teilspiel das in 1_a beginnt:

extensive Form



$\Rightarrow$

Normalform

Eva (1) \ Maria (2)	$W_1, L_2,$	L_1, L_2
w_1, l_2	R R	D $2r-D$
l_1, l_2	$2r-D$ D	r r

Dieses Teilspiel hat zwei Nash Gleichgewichte in reinen Strategien sowie eines in gemischten Strategien.

Übung 8.1. Rechnen Sie das Gleichgewicht in gemischten Strategien aus.
Beschreiben Sie alle drei Gleichgewichte vollständig.

8.6 Zölle

Wir betrachten das folgende 2-Länder, 1-Gut Modell.

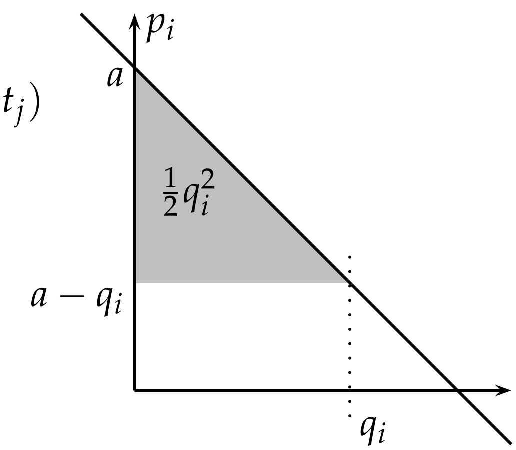
- Es gibt zwei Länder in denen das Gut jeweils zum Preis von c hergestellt werden kann.
- Jede Firma i produziert die Menge h_i für die Konsumenten im eigenen Land, und e_i für den Export.
- In jedem Land i kann die Menge $q_i = h_i + e_j$ zum Preis von $p_i = a - q_i$ abgesetzt werden.
- Jede Regierung i belegt Importgüter mit einem Zoll von t_i pro Stück.

1. Zunächst legen beide Regierungen simultan Zölle t_i, t_j fest.
2. Dann legt jede Firma Mengen h_i, e_i, bzw. h_j, e_j fest.

- Firmen maximieren ihre Profite

  $$\pi_i = h_i \cdot (a - q_i - c) + e_i \cdot (a - q_j - c - t_j)$$

- Regierungen maximieren die Summe aus…
  - Konsumentenrente $\frac{1}{2}q_i^2$
  - Profit von Firma i
  - Zolleinnahmen $t_i \cdot e_j$



Übung 8.2.
- Welche Zölle werden im teilspielperfekten Gleichgewicht gesetzt?
- Welche Zölle sind sozial optimal?

9 Wiederholte Spiele

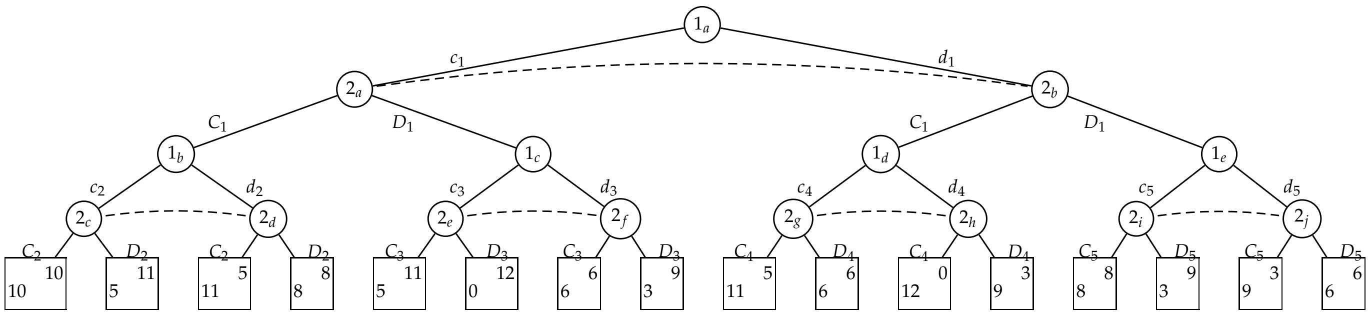
Quellenspiel und wiederholtes Spiel
Wir betrachten den Fall, dass sich eine bestimmte Situation immer wiederholt. Diese Situation sei durch ein Quellenspiel beschrieben. Das wiederholte Spiel sei die endliche oder unendliche Wiederholung des Quellenspiels.

Auszahlungen in wiederholten Spielen
Werden Spiele endlich oft wiederholt, nehmen wir hier an, dass die Auszahlung des wiederholten Spiels die Summe der Auszahlungen der einzelnen Quellenspiele ist.

9.1 Endlich oft wiederholtes Gefangenendilemma

Das folgende Gefangenendilemma wird zweimal gespielt.

		Maria: C	Maria: D
Eva	c	5, 5	0, 6
Eva	d	6, 0	3, 3



Beobachtung: Eva und Maria haben jeweils 32 Strategien.

Löse das Spiel mit Rückwärtsinduktion. In der letzten (zweiten Stufe) brauchen sich die beiden um die Auszahlungen der ersten Stufe nicht mehr zu kümmern (die addieren sich einfach zu den Auszahlungen der zweiten Stufe und ändern die strategische Situation nicht).

Also wird in der zweiten Stufe das (einzige) Nash Gleichgewicht des Stufenspiels gespielt.

Damit ist dann auf der ersten Stufe klar, dass, egal was das Ergebnis der ersten Stufe ist, die Auszahlungen der zweiten davon nicht betroffen sind. Mithin wird auch in der ersten Stufe das (einzige) Nash Gleichgewicht des Stufenspiels gespielt.

teilspielperfektes Gleichgewicht: $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5; D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$

Satz 14. *Wenn das Quellspiel G nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht hat, hat das endlich oft wiederholte Spiel ein eindeutiges teilspielperfektes Gleichgewicht in dem in jeder Stufe das teilspielperfekte Gleichgewicht des Quellspiels gespielt wird.*

Anmerkung: Im wirklichen Leben wird sehr viel mehr kooperiert als in der Spieltheorie angenommen.

9.2 Endlich oft wiederholtes modifiziertes Gefangenendilemma

Betrachte nun das folgende modifizierte Spiel (wieder zweimal gespielt)

Maria

Eva	C	D	E
c	5, 5	0, 6	0, 0
d	6, 0	3, 3	0, 0
e	0, 0	0, 0	1, 1

(Erster Wert: Auszahlung Eva, zweiter Wert: Auszahlung Maria)

Beobachtung 1: Eva und Maria haben jeweils $3^{10} = 59049$ Strategien.

Beobachtung 2: Das Quellspiel hat zwei Nash Gleichgewichte in reinen Strategien.

Jetzt gibt es wieder ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem stets D bzw. d gespielt wird. Die Strategien lassen sich z.B. wie folgt beschreiben:

	Periode 1	Periode 2								
		Cc	Cd	Ce	Dc	Dd	De	Ec	Ed	Ee
Eva	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d
Maria	d	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Die Auszahlung in diesem teilspielperfekten Gleichgewicht ist für Eva und Maria jeweils 6.

Es gibt aber auch ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem Eva und Maria jeweils 8 erhalten:

	Periode 1	Periode 2								
		Cc	Cd	Ce	Dc	Dd	De	Ec	Ed	Ee
Eva	c	d	e	e	e	e	e	e	e	e
Maria	C	D	E	E	E	E	E	E	E	E

Kooperation in der ersten Stufe wird erreicht durch Drohung mit Bestrafung in der zweiten Stufe.

Beispiel 9.1. Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Maria	
		c	d
Eva	A	1 1	2 0
	B	0 2	-1 -1

1. Zeigen Sie, dass dieses Spiel drei Nash Gleichgewichte hat.
2. Nun wird dieses Spiel zweimal gespielt. Wieviele reine Strategien hat Eva und wieviele hat Maria?
3. Wieviele reine Strategien hat jede, wenn dieses Spiel dreimal gespielt wird?
4. Zeigen Sie, dass das zweimal gespielte Spiel mindestens neun teilspielperfekte Gleichgewichte hat. Finden Sie ein zehntes teilspielperfektes Gleichgewicht.

Das folgende Spiel wird 100 mal gespielt. Die Auszahlungen des wiederholten Spiels sind die Summen der Auszahlungen des Quellenspiels.

		Maria	
		a	b
Eva	a	2 2	3 0
	b	0 3	-1 -1

Betrachte die folgende Strategie s für das wiederholte Spiel: Spiele immer a in Periode 1 bis 99 und spiele a und b mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ in Periode 100, es sei denn in der Vergangenheit ist einmal $\{a, b\}$ oder $\{b, a\}$ gespielt worden. In diesem Fall finde die erste Periode in der $\{a, b\}$ oder $\{b, a\}$ gespielt wurde, und spiele die Strategie die der Spieler in dieser Periode <u>nicht</u> verwendet hat.

Beispiel 9.2.

1. Warum ist $\{s, s\}$ ein Nash Gleichgewicht.
2. Warum ist $\{s, s\}$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht?
3. Geben Sie ein Beispiel für ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem ein anderer Auszahlungsstrom generiert wird.

4. Warum können mit obigem Quellenspiel so viele unterschiedliche Auszahlungen generiert werden?

(aus [1, 8.6.28])

Übung 9.1. Betrachten Sie das folgende Battle of the Sexes:

		Maria	
		a	b
Eva	a	1 2	-1 -1
	b	-1 -1	2 1

Finden Sie alle drei Nash Gleichgewichte.

Übung 9.2. 1. Nun betrachten Sie das n mal gespielte Spiel aus Übung 9.1. Die Auszahlungen sind die Summe der Auszahlungen des Quellenspiels. Betrachten Sie die folgende Strategie s:

- Spiele a und b mit gleicher Wahrscheinlichkeit bis zur vorletzten Periode, es sein denn in irgendeiner Periode wurde $\{a, a\}$ oder $\{b, b\}$ gespielt. In diesem Fall spiele ab dieser Periode abwechselnd a und b bis zur vorletzten Runde. Falls bis dahin gleichoft $\{a, a\}$ und $\{b, b\}$ gespielt wurde, spiele die Strategie aus dem gemischten Nash Gleichgewicht des Quellenspiels. Sonst alterniere auch in der letzten Runde. Falls bis zur vorletzten Periode nie $\{a, a\}$ oder $\{b, b\}$ gespielt wurde, spiele die Strategie aus dem gemischten Nash Gleichgewicht des Quellenspiels.

Warum ist $\{s, s\}$ ein Nash Gleichgewicht?

2. Ist $\{s, s\}$ auch ein teilspielperfektes Gleichgewicht?

(aus [1, 8.6.29])

Übung 9.3. Das folgende Spiel wird zweimal gespielt:

		Maria		
		a	b	c
Eva	A	1 3	0 0	0 5
	B	1 2	2 1	1 3
	C	2 1	1 0	4 4

Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem in der ersten Periode $\{C, c\}$ gespielt wird? Falls ja, welches? Falls nein, warum nicht?

(aus [3, 2.3.2.11])

9.3 Unendlich oft wiederholte Spiele

Quellenspiel

- Wir nehmen an, dass ein Quellenspiel in Normalform vorliegt (das Quellenspiel hat also ein einziges Teilspiel — das Spiel selbst). Im Quellenspiel bezeichnen wir eine reine Strategie von Spieler i mit $s_i \in S_i$
- Das Quellenspiel wird in den Perioden 1,2,3,… gespielt. Wir bezeichnen die Kombination von Zügen in jeder Periode t mit s^t (Die Züge sind reine Strategien des Quellenspiels).

Vorgeschichte und Strategien
Die Vorgeschichte bis t enhält alle bis dahin gemachten Kombinationen von Zügen: $h_t = \{s^1, s^2, \ldots, s^t\}$.

Diese Vorgeschichte ist allen Spielern bekannt, d.h. sie definiert für jeden Spieler einen Informationsbezirk.

Eine reine Strategie vom Spieler i für das unendlich wiederholte Spiel ist eine Funktion ϕ_i die jedem Spielverlauf h_t einen Zug $s_i \in S_i$ im Quellspiel zuordnet: $s_i^{t+1} = \phi_i(h_t) \in S_i$ Beachte: $\phi_i(h_t)$ schreibt also vor, was Spieler i

- in der allerersten Periode machen soll (wenn $h_t = \{\}$),
- für alle möglichen Spielverläufe der ersten Periode machen soll (wenn $h_t = \{s^1\}$),
- für alle möglichen Spielverläufe der zweiten Periode machen soll (wenn $h_t = \{s^1, s^2\}$),
- …

9.3.1 Auszahlungen

Bei unendlich wiederholten Spielen können wir nicht mehr die Summe aller Auszahlungen des Quellenspiels bilden (die Summe würde vermutlich unendlich groß). Wir betrachten statt dessen

- einen Grenzwert des Mittelwerts der Auszahlungen $\lim_{T\to\infty} \inf \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} u_t$, oder
- abdiskontierte Auszahlungen $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_t$, oder
- den Mittelwert der abdiskontierten Auszahlungen. $\dfrac{\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_t}{\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t}$

Eva und Maria spielen das folgende Gefangenendilemma unendlich oft.

		Maria	
		c	d
Eva	c	2, 2	−1, 3
	d	3, −1	0, 0

Weil ihnen beim Spielen langweilig werden würde, beauftragt jede von ihnen einen Automaten, das Spiel für sie zu spielen. Jede wählt aus den folgenden fünf Automaten aus:

1. Spiele immer c.
2. Spiele immer d.
3. Beginne mit c. Solange die andere immer c spielt, bleibe dabei. Ansonsten spiele d für alle Zukunft (grim).
4. Beginne mit c und spiele dann was die andere gemacht hat (tit-for-tat).
5. Beginne mit d. Wechsle Deine Strategie immer, wenn die andere d gespielt hat. Bleibe bei Deiner Strategie immer, wenn die andere c gespielt hat (tat-for-tit).

Sobald jede einen Automaten gewählt hat, spielen die Automaten das Spiel unendlich oft. Als Auszahlung erhalten Eva und Maria den Grenzwert des Mittelwerts der Auszahlungen.

Beispiel 9.3. 1. Stellen Sie das Spiel in Bi-Matrix-Form dar.

2. Finden Sie alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien.

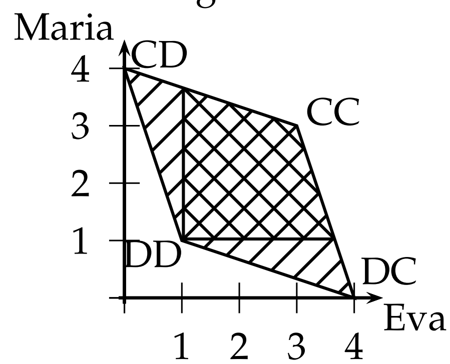
(aus [1, 8.6.20])

9.3.2 Stabilitätsbereich

Quellenspiel

		Maria	
		C	D
Eva	c	3, 3	0, 4
	d	4, 0	1, 1

Auszahlungsbereich



Eva und Maria können durch geschicktes Mischen als Durchschnittsauszahlung jeden Wert in der Raute erzielen, die durch die Auszahlungen der vier Kombinationen reiner Strategien aufgespannt wird.

Allerdings kann sich jede zumindest ihre minimax Auszahlung garantieren. Im Beispiel, wenn sie immer D spielt, erhält sie auf jeden Fall mindestens 1.

9.3.3 Minimax Auszahlung

Definition 24 (Minimax)**.** Hat Spieler i die Menge reiner Strategien S_i und die anderen Spieler die Menge i-unvollständiger Kombinationen gemischter Strategien Σ_{-i} dann ist die minimax Auszahlung

$$\bar{u}_i = \min_{\sigma_{-i}\in\Sigma_{-i}} \max_{s_i\in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

Beispiel 9.4. Vergleichen Sie im folgenden Spiel die minimax Auszahlung mit

$$\underline{u}_i = \max_{\sigma_i\in\Sigma_i} \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i})$$

Maria

Eva	C	D
a	1, 5	3, 5
b	2, 5	0, 5

9.3.4 Folktheorem

Satz 15 (Folktheorem/Rubinstein)**.** *In einem unendlich oft wiederholten Spiel seien Auszahlungen die Durchschnittsauszahlungen des Quellenspiels. Dann kann die Auszahlung u in einem teilspielperfekten Gleichgewicht erreicht werden, wenn*

1. *u eine konvexe Kombination der Auszahlungen des Quellenspiels ist, und*
2. *alle Elemente u größer oder gleich den jeweiligen minimax Auszahlungen der jeweiligen Spieler sind.*

Wir nennen die Menge aller Durchschnittsauszahlungen u, die in einem teilspielperfekten Gleichgewicht erreicht werden kann, auch Stabilitätsbereich.

Übung 9.4. Bestimmen Sie zu folgendem Spiel die minimax Auszahlung von Eva und Maria. Stellen Sie den Stabilitätsbereich graphisch dar.

Maria

Eva	A	B	C
a	1, 0	6, 4	0, 9
b	2, 1	0, 2	3, 0
c	3, 7	2, 3	4, 0

(aus [1, 8.4.4])

9.3.5 Unendlich oft wiederholtes Gefangenendilemma

Betrachten Sie das folgende Gefangenendilemma:

		Maria	
		C	D
Eva	C	5, 5	0, 6
	D	6, 0	3, 3

Das Spiel wird unendlich oft wiederholt. Nehmen Sie an, dass Eva und Maria beide die folgende Strategie verwenden:

- Spiele C in der ersten Periode.
- Falls in irgendeiner Periode nicht $\{C, C\}$ gespielt wurde, spiele fortan nur noch D, ansonsten bleibe bei C.

(Wir nennen diese Strategie auch 'Grim').

Beispiel 9.5.

1. Nehmen Sie an, dass die Auszahlungen des obigen Spiels mit dem Faktor δ abdiskontiert werden. Nehmen Sie an, dass δ sehr nahe bei 1 liegt und zeigen Sie, dass diese Kombination von reinen Strategien ein teilspielperfektes Gleichgewicht darstellt.
2. Wie klein muss δ sein, damit diese Kombination von reinen Strategien kein teilspielperfektes Gleichgewicht mehr ist?

(aus [1, 8.6.8])

Übung 9.5. Betrachten Sie das Cournot Spiel, das wir bereits in Abschnitt 4.4.1 diskutiert haben.

1. Was ist der Gewinn im Gleichgewicht?
2. Nehmen Sie an, die beiden Firmen würden gemeinsam die Summe des Gewinns maximieren. Wie groß sind Gesamtmenge und Gesamtgewinn?
3. Nun nehmen Sie an, das Spiel würde unendlich oft wiederholt mit Diskontrate δ. Nehmen Sie zunächst an, δ liegt nahe bei 1. Finden Sie eine Strategiekombination, die im teilspielperfekten Gleichgewicht dazu führt, dass in jeder Periode die Monopolmenge angeboten wird.

4. Wie klein muss δ sein, damit diese Strategiekombination kein teilspielperfektes Gleichgewicht mehr ist?

Übung 9.6. Betrachten Sie das Bertrand Spiel aus Übung 4.11.

1. Welche Preise würden die Firmen wählen, wenn Sie den Gesamtgewinn beider Firmen maximieren würden?
2. Betrachten Sie nun das unendlich oft wiederholte Spiel mit Diskontfaktor δ. Zeigen Sie, dass es für hinreichend großes δ ein teilspielperfektes Gleichgewicht gibt, in dem die Preise gesetzt werden, die den Gesamtgewinn beider Firmen maximieren.
3. Zeigen Sie, dass notwendige Voraussetzung dazu $\delta \geq 1/2$ ist.

10 Information

Bislang haben wir drei Arten von Informationsstruktur untersucht:

- Spieler entscheiden simultan, ohne zu wissen, was die anderen Spieler gerade entscheiden. (Normalformspiele)
- Spieler entscheiden sequentiell, und sind genau darüber informiert, was die anderen Spieler im Spielverlauf gemacht haben. (Spiele in extensiver Form, bei denen jeder Knoten des Spielbaums auch ein Informationsbezirk ist).
- Spieler entscheiden sequentiell, sind aber nicht immer darüber informiert, was die anderen Spieler im Spielverlauf gemacht haben. (Spiele in extensiver Form, bei denen mehrere Knoten des Spielbaums in einem Informationsbezirk zusammengefasst werden).

Nun betrachten wir einen vierten Typ von fehlender Information. Diesmal nicht über die Aktionen von Spielern, sondern über Typen von Spielern.

Beispiele

- Kostenfunktionen von Produzenten sind nicht allen Konkurrenten bekannt.
- Nutzenfunktionen von Bietern in einer Auktion sind nicht allen anderen Bietern bekannt.

Wir werden diese Unsicherheit durch einen Zug eines künstlichen Spielers, den wir „Natur“ nennen, modellieren. Ein Spiel beginnt oftmals mit einem Zug von „Natur“ die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten die Typen der anderen Spieler festlegt.

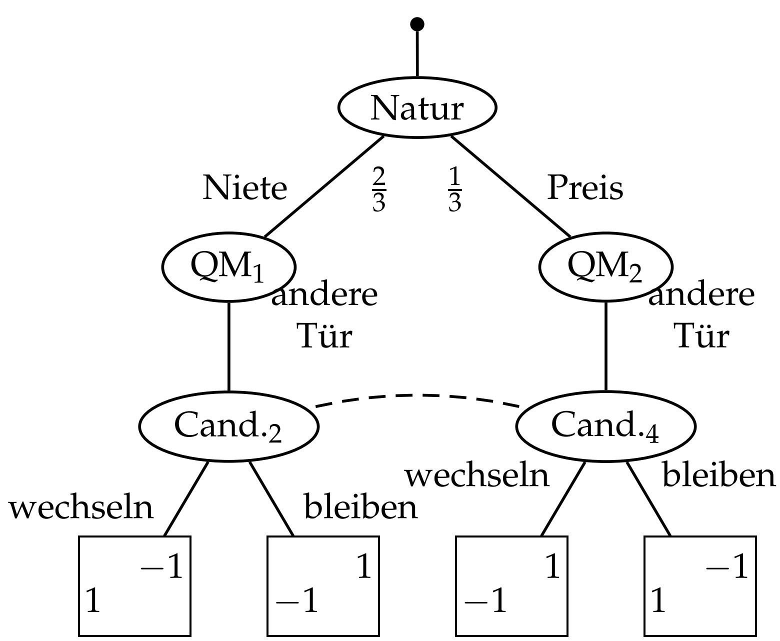
Beispiel 10.1. Bei einem Fernsehquiz hat ein Kandidat die Möglichkeit ein Auto zu gewinnen indem er eine von drei Türen wählt. Hinter einer Türe steht ein Auto, hinter den anderen beiden ist nichts. Die Show läuft immer wie folgt ab:

Zuerst entscheidet sich der Kandidat für eine der drei Türen. Dann muss der Quizmaster eine der anderen Türen öffnen, hinter der kein Auto steht. Der Kandidat hat nun die Möglichkeit zu wechseln, oder bei der ursprünglichen Türe zu bleiben.

- Sollte der Kandidat wechseln oder bleiben?

- Betrachten Sie nun die folgende Variante: Der Quizmaster muss immer noch eine Türe öffnen, es kann aber auch die Türe sein, vor der der Kandidat steht. Außerdem muß er das Auto aus eigener Tasche bezahlen (möchte also nicht, dass der Kandidat das Auto bekommt).

  Was ist nun ein Gleichgewicht?



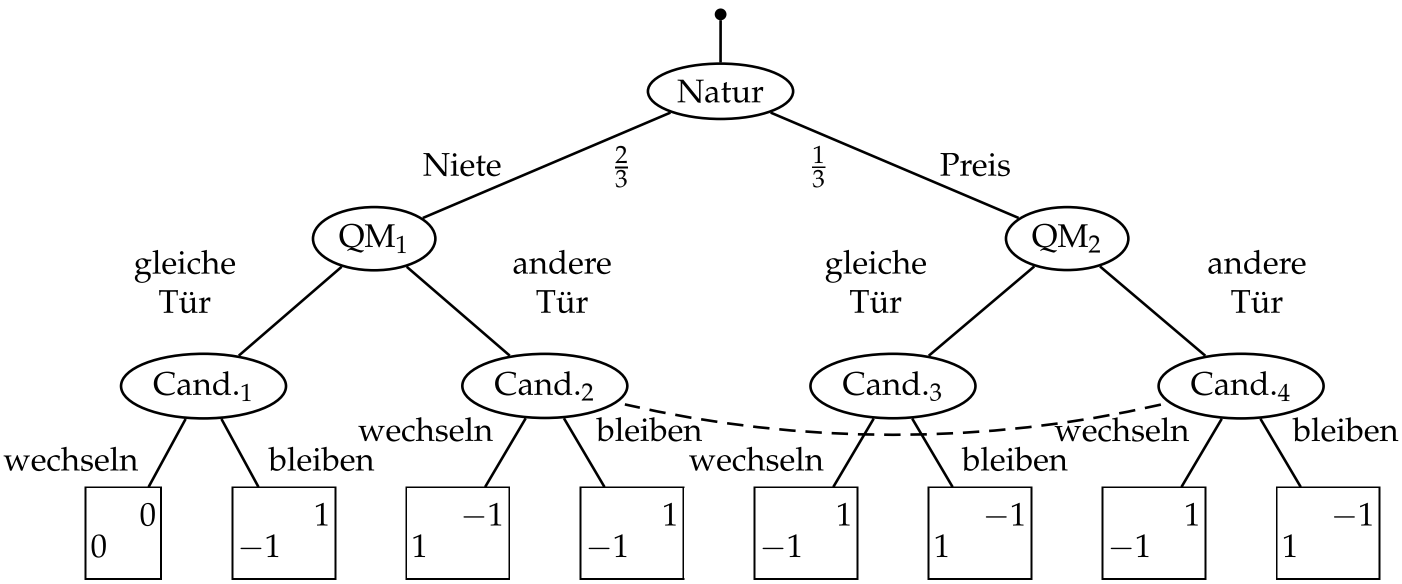
Auszahlung bei wechseln:

$$\frac{2}{3}\boxed{\begin{smallmatrix} & -1 \\ 1 & \end{smallmatrix}} + \frac{1}{3}\boxed{\begin{smallmatrix} & 1 \\ -1 & \end{smallmatrix}} = \boxed{\begin{smallmatrix} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \end{smallmatrix}}$$

Auszahlung bei bleiben:

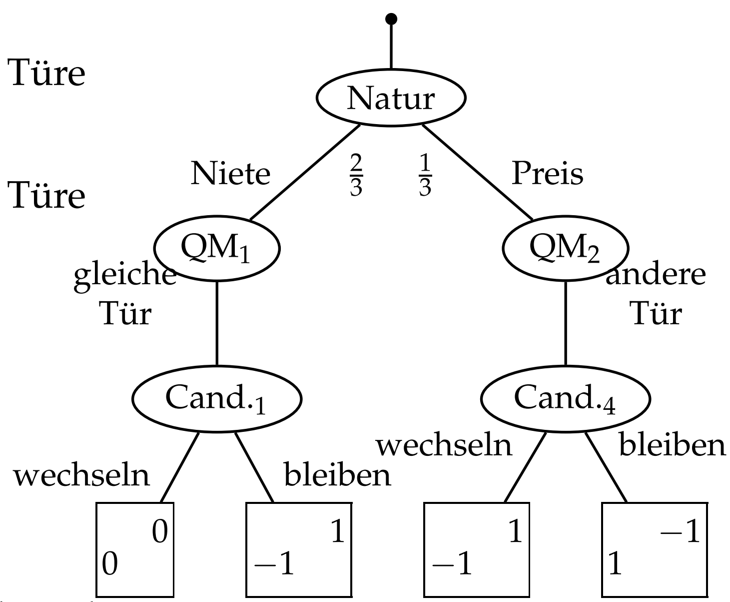
$$\frac{2}{3}\boxed{\begin{smallmatrix} & 1 \\ -1 & \end{smallmatrix}} + \frac{1}{3}\boxed{\begin{smallmatrix} & -1 \\ 1 & \end{smallmatrix}} = \boxed{\begin{smallmatrix} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \end{smallmatrix}}$$

nun kann der QM auch die gleiche Türe aufmachen:



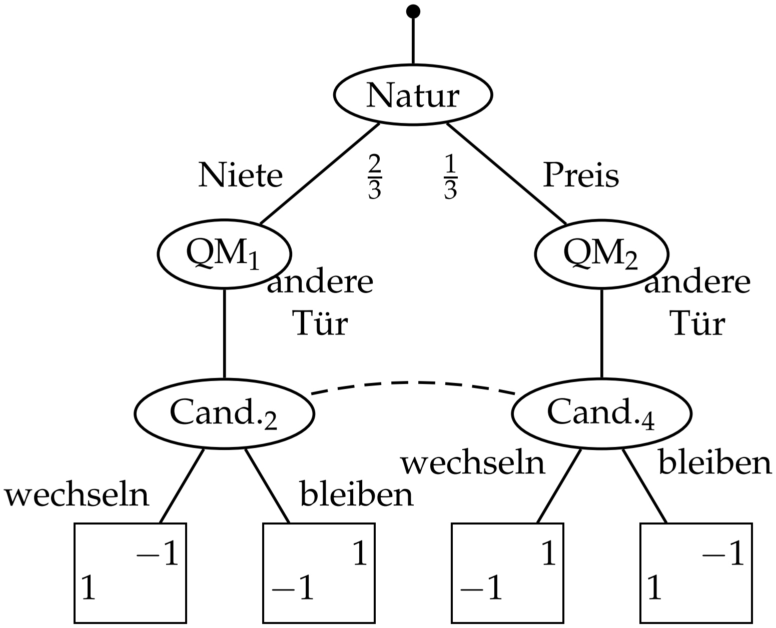
naïve Strategie des QM:

- bei Preis: immer die andere Türe öffnen
- bei Niete: immer die gleiche Türe öffnen



→ der Kandidat weiß wo er ist und wird immer gewinnen.
alternative naïve Strategie des QM:

- bei Preis: immer die andere Türe öffnen
- bei Niete: immer die andere Türe öffnen



Auszahlung bei wechseln:

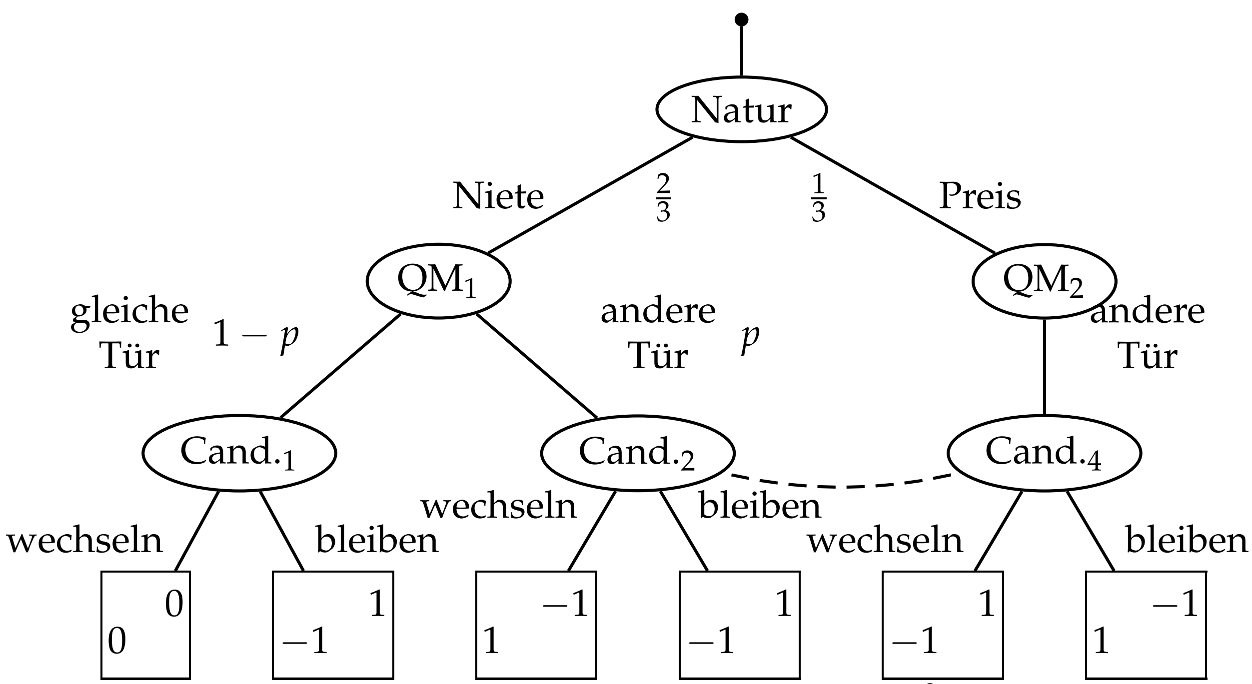
$$\frac{2}{3}\boxed{\begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix}} + \frac{1}{3}\boxed{\begin{matrix} & 1 \\ -1 & \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \end{matrix}}$$

Auszahlung bei bleiben:

$$\frac{2}{3}\boxed{\begin{matrix} & 1 \\ -1 & \end{matrix}} + \frac{1}{3}\boxed{\begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \end{matrix}}$$

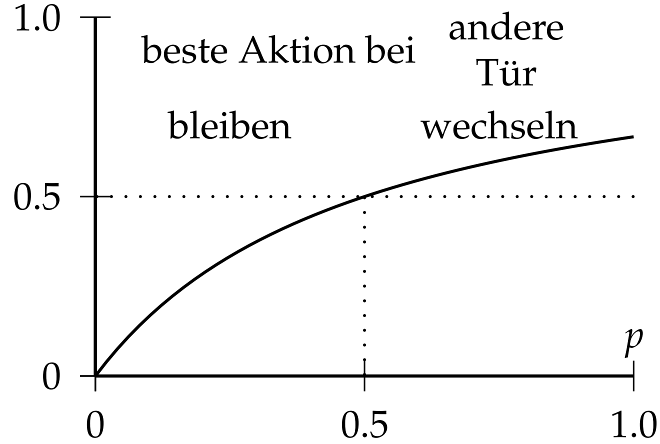
$\rightarrow$ gleiche Situation wie oben, Cand. gewinnt im Erwartungswert $\frac{1}{3}$.
bessere Strategie:

- bei Preis: immer die andere Türe öffnen
- bei Niete: die andere Türe mit WS p öffnen



Wahrscheinlichkeit bei wechseln in Cand.$_2$ zu sein: $\frac{\frac{2}{3}p}{\frac{2}{3}p+\frac{1}{3}} = \frac{2p}{2p+1}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit bei Cand.$_2$ zu sein:



10.1 „Real dykes don't eat quiche"

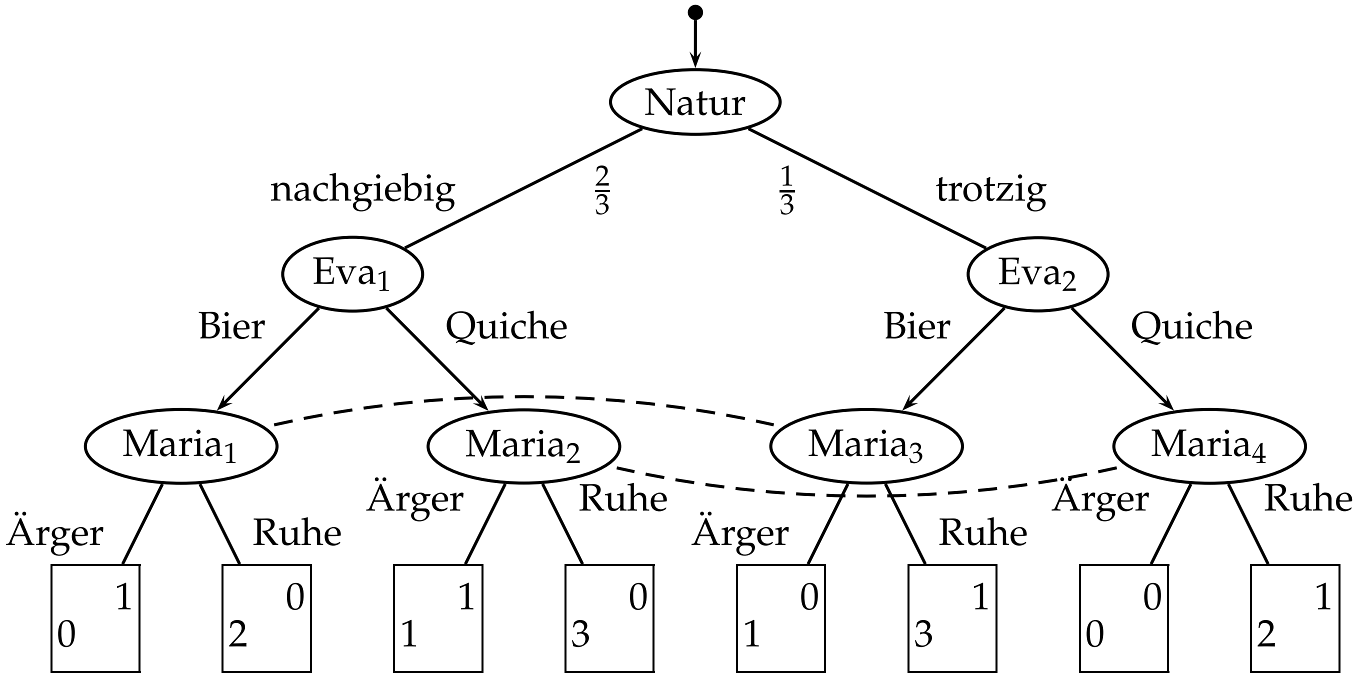
Eva sitzt in der Bar und will ihre Ruhe haben. Maria betritt die Bar und möchte jemanden ärgern. Wenn Eva trotzig ist, wird es Maria keinen Spaß machen Eva zu ärgern, wohl aber, wenn Eva nachgiebig ist. Maria weiß nicht, ob Eva trotzig oder nachgiebig ist, allerdings weiß sie, dass nachgiebige Personen lieber Quiche essen, und trotzige Personen lieber Bier trinken.

Wir modellieren diese Situation wie folgt: Zuerst entscheidet ein Zug der Natur über den Typ von Eva. Eva kennt ihren Typ (nachgiebig oder trotzig), Maria aber nicht. Eva entscheidet nun, gegeben ihren Typ, ob sie Bier trinkt oder Quiche isst. Dies beobachtet Maria, die folglich entweder versucht Eva zu ärgern oder nicht.

Wenn Maria streitet, hat sie mit einer nachgiebigen Person eine Auszahlung von 1, mit einer trotzigen Person eine Auszahlung von 0. Wenn Maria nicht streitet, hat sie mit einer trotzigen Person eine Auszahlung von 1, mit einer nachgiebigen Person eine Auszahlung von 0.

Wenn Eva in Ruhe gelassen wird, hat sie eine Auszahlung von 2, sonst 0.

Außerdem bekommt sie zusätzlich 1 wenn sie isst und trinkt, was ihr schmeckt.



Beispiel 10.2.

1. Wie viele Teilspiele hat dieses Spiel? An welchen Knoten beginnen sie?

2. Zeigen Sie, dass Eva und Maria jeweils vier reine Strategien haben.

3. Berechnen Sie die Erwartungsauszahlungen für jede Kombination von reinen Strategien und stellen Sie das Spiel in Bi-Matrix-Form dar.

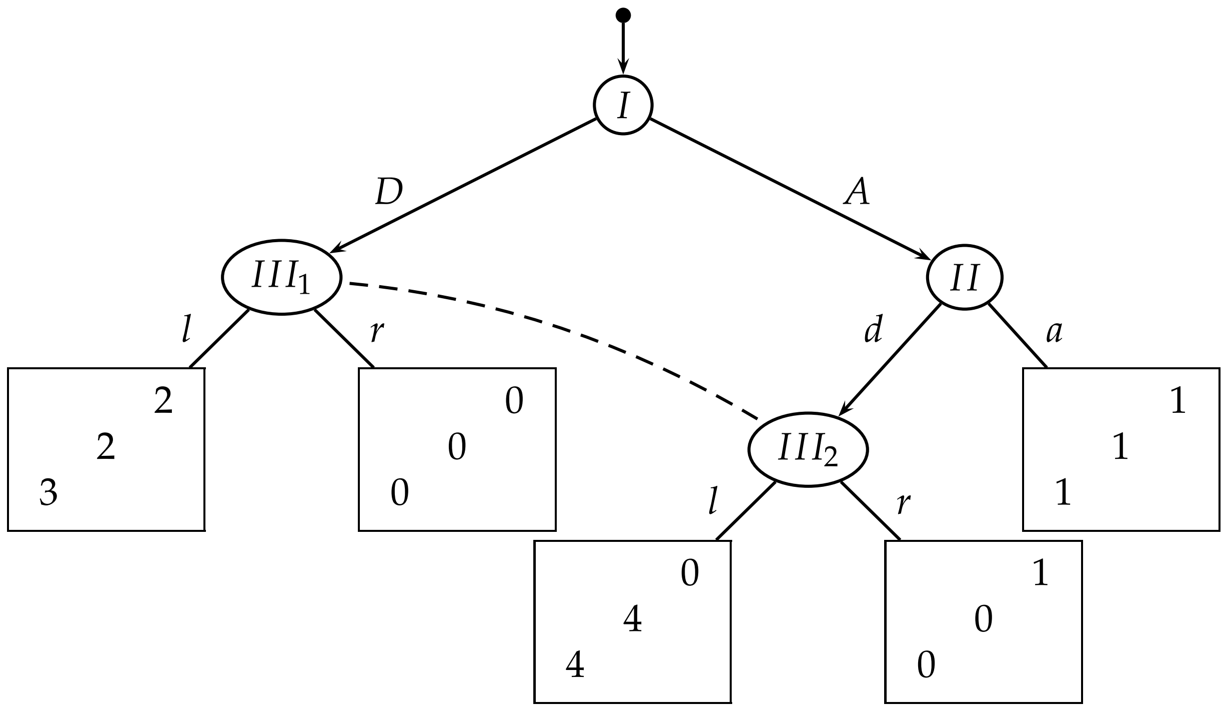
Beispiel 10.3. Betrachten Sie weiter Beispiel 10.2.

1. Gibt es ein Nash Gleichgewicht in reinen Strategien?

2. Zeigen Sie, dass es ein Nash Gleichgewicht in gemischten Strategien gibt.

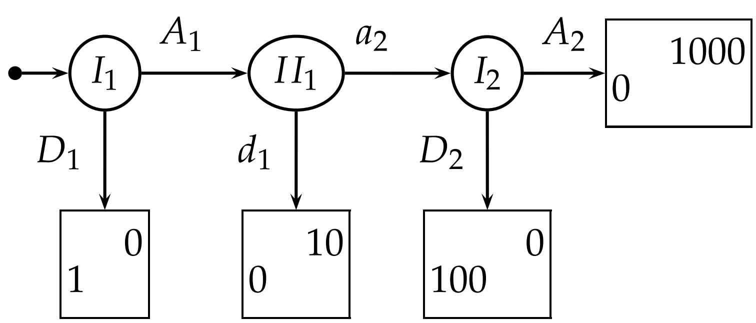
Definition 25 (Verhaltensstrategie)**.** Eine Verhaltensstrategie eines Spielers ordnet jedem Informationsbezirk des Spielbaums eine Wahrscheinlichkeit über die dort möglichen Züge zu.

10.2 Seltens Horse-Spiel



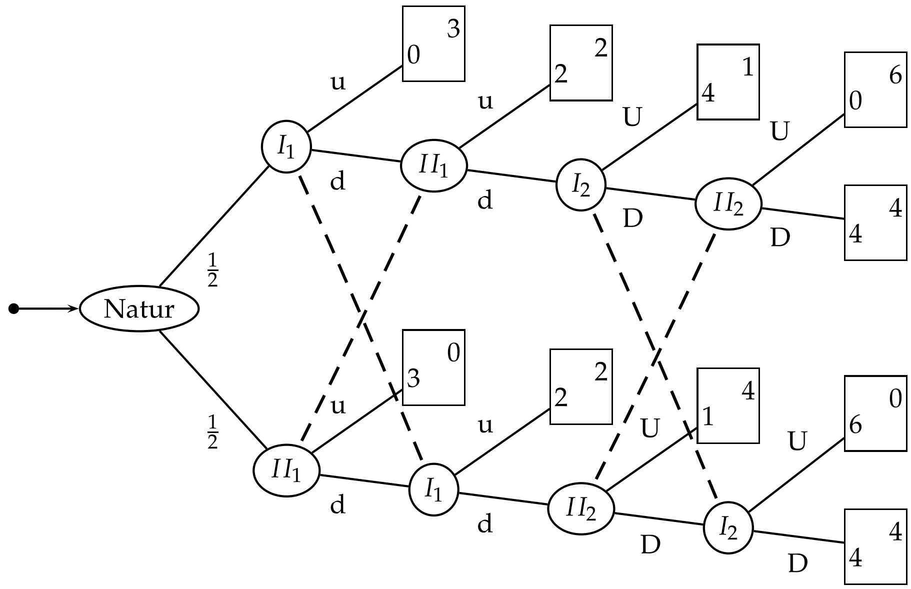
10.3 Mini-Centipede

Beispiel 10.4.



Was überlegt sich Spieler II wenn er im Knoten II_1 zum Zug kommt? Nehmen wir an, es gibt zwei Typen von Spielern. Spieler, die das Spiel verstanden haben, und einen Anteil ϵ von Spielern die immer A spielen.

Betrachten Sie das folgende Spiel in extensiver Form:



Übung 10.1. 1. Wie viele Teilspiele hat das Spiel?

2. Welche reinen Strategien hat jeder Spieler?
3. Stellen Sie das Spiel in Bi-Matrix-Form dar.
4. Zeigen Sie durch wiederholte Elimination strikt dominierter Strategien dass $\{dU, dU\}$ ein Nash Gleichgewicht ist.
5. Gibt es weitere Nash Gleichgewichte?

(aus [1, 4.8.27])

10.4 Adverse Selektion

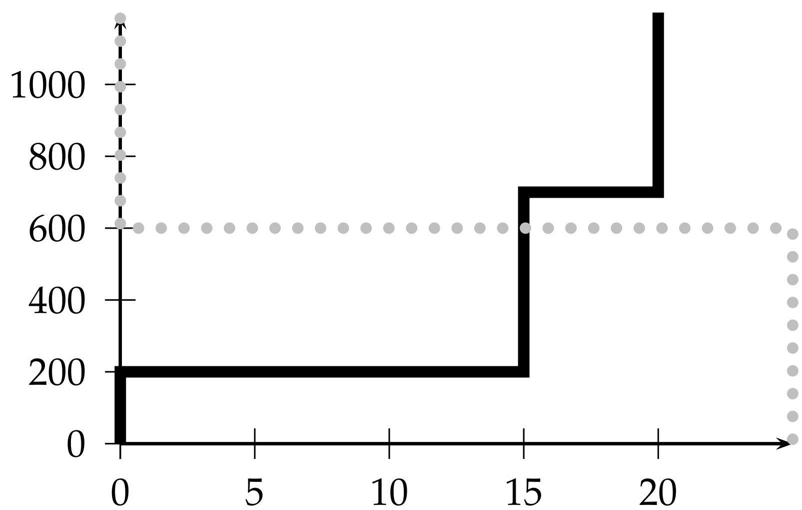
Beispiel 10.5. Eva betreibt einen Gebrauchtwagenhandel. Sie hat 20 Autos zum Verkauf. 15 Autos sind in schlechten Zustand, 5 in gutem Zustand. Leider ist den Autos ihr Zustand nicht anzusehen.

Es gibt 25 potentielle Käufer. Der Wert der jeweiligen Autos bestimmt sich nach folgender Tabelle:

	Wert	
Zustand	Eva	Käufer
gut	700 €	1200 €
schlecht	200 €	400 €

1. Fall: Käufer nehmen an, dass alle Autos auf den Markt kommen. Wie groß wäre dann die Zahlungsbereitschaft der Käufer?

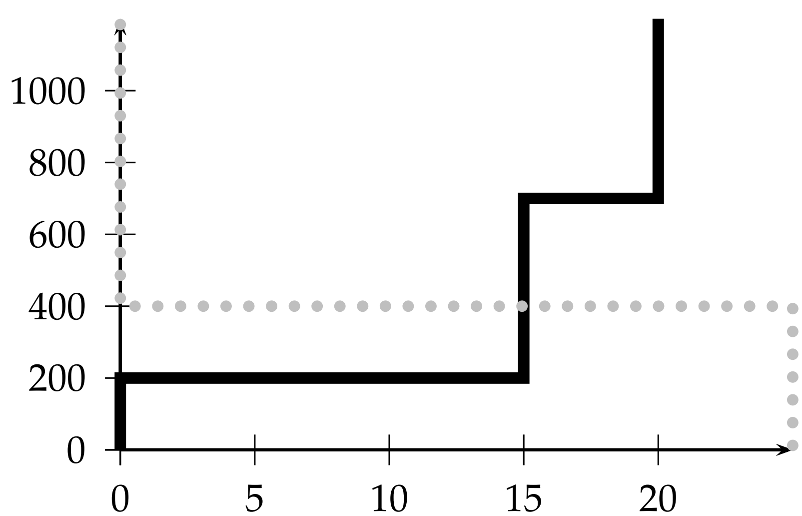
Was ist die Angebotskurve für gebrauchte Autos?



Welcher Preis kommt zustande? Sind bei diesem Preis die Beliefs der Käufer noch 'self-confirming'?

- Welche Qualität sollten Käufer erwarten, wenn der Preis über 700 liegt?
- Welche Qualität sollen Käufer erwarten, wenn der Preis zwischen 200 und 700 liegt?
- Welche Qualität sollten Käufer erwarten, wenn der Preis unter 200 liegt?

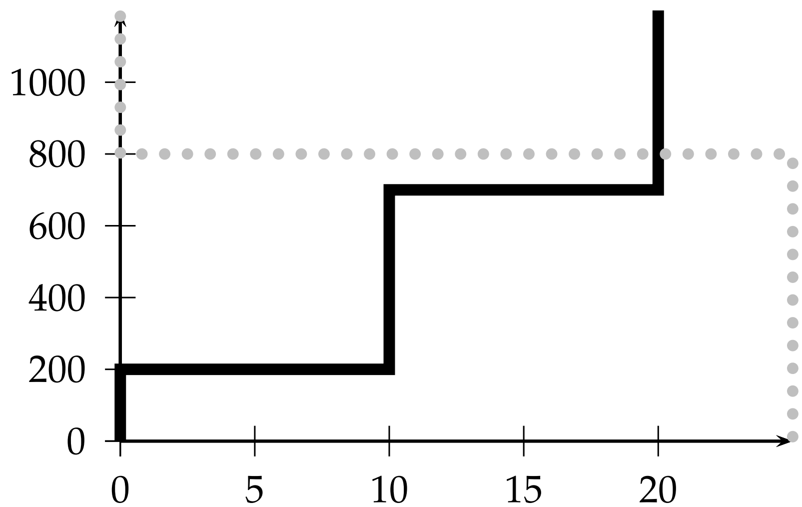
Was ist die Nachfrage bei einem Preis zwischen 200 und 700?



Beispiel 10.6. Nun habe Eva 10 gute und 10 schlechte Autos:

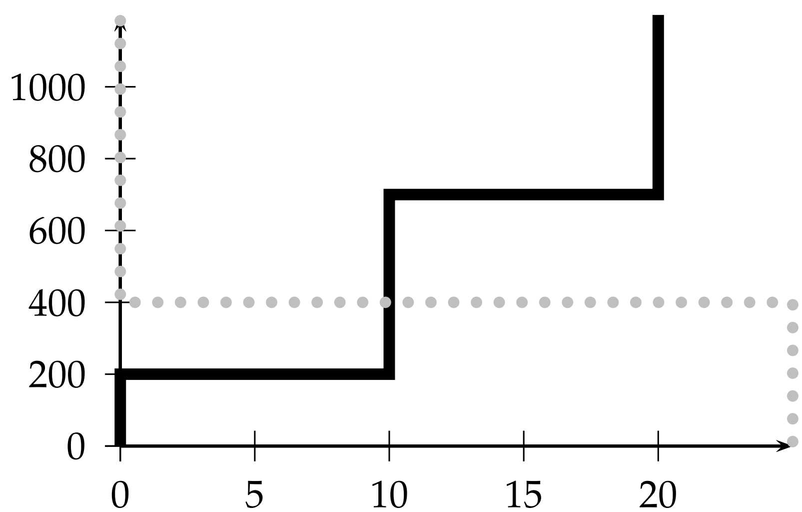
	Wert	
Zustand	Eva	Käufer
gut	700 €	1200 €
schlecht	200 €	400 €

1. Fall: Käufer nehmen an, daß alle Autos auf den Markt kommen. Was ist dann die Nachfrage?



Sind die Beliefs der Käufer 'self-confirming'?

2. Fall: Käufer nehmen an, dass nur schlechte Autos auf den Markt kommen. Was ist dann die Nachfrage?

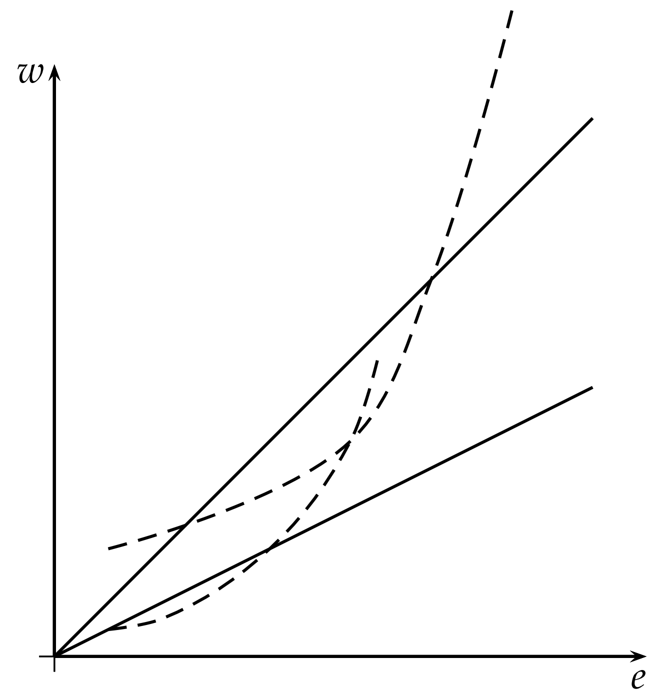


Sind die Beliefs der Käufer 'self-confirming'?

Übung 10.2. Es gibt ein Kontinuum von 100 Autos deren Wert für Verkäufer jeweils v ist. v ist gleichverteilt zwischen 1900 und 2900. Der Wert eines jeden Autos ist $v + 100$ für den Käufer. Verkäufer kennen v, Käufer kennen v nicht und haben keine Möglichkeit, v vor dem Kauf zu lernen.

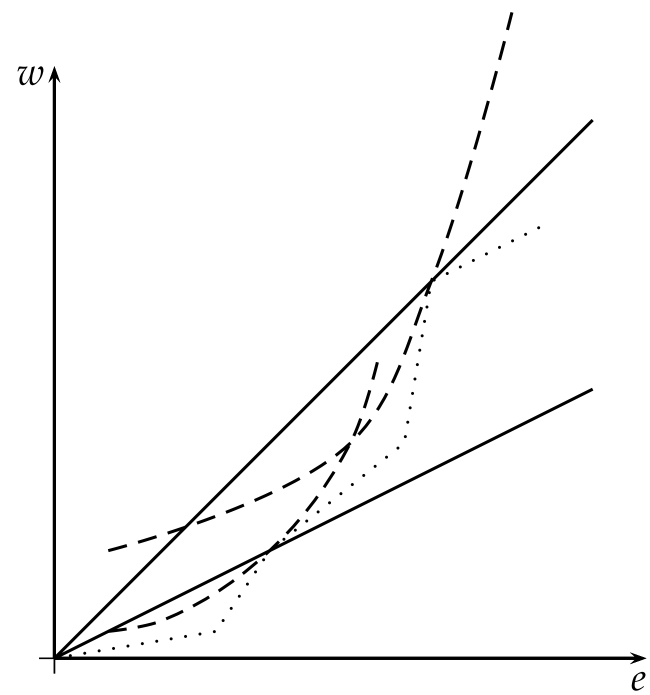
1. Was ist die Angebotsfunktion, gegeben ein Preis p?
2. Was ist die Nachfragefunktion, gegeben ein Preis p?
3. Was ist das Marktgleichgewicht?

10.5 Signalling

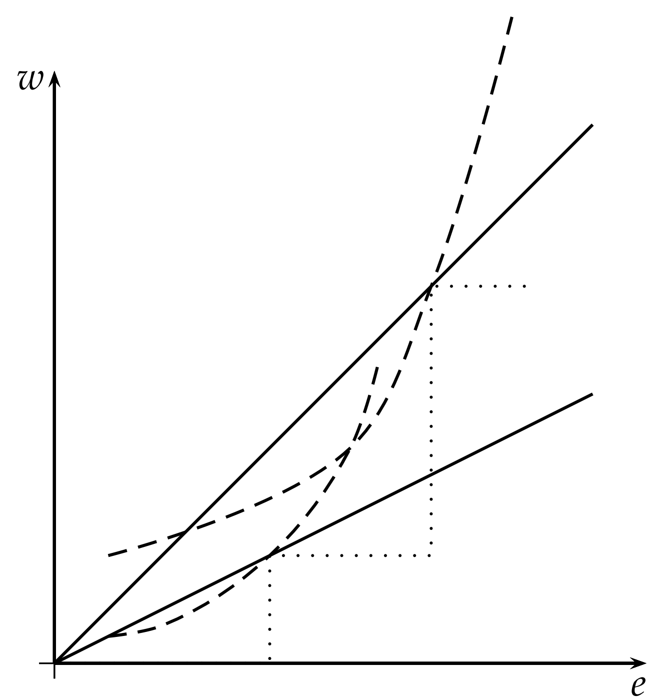


Im Job Signalisierungmodell von Spence gibt es 2 Typen von Arbeitern, solche mit hoher Produktivität und solche mit niedriger Produktivität. Die durchgezogenen Linien geben die Produktivität abhängig vom Ausbildungsniveau e an. Die gestrichelten Linien zeigen jeweils eine Indifferenzkurve für einen Arbeiter mit hoher und mit niedriger Produktivität.

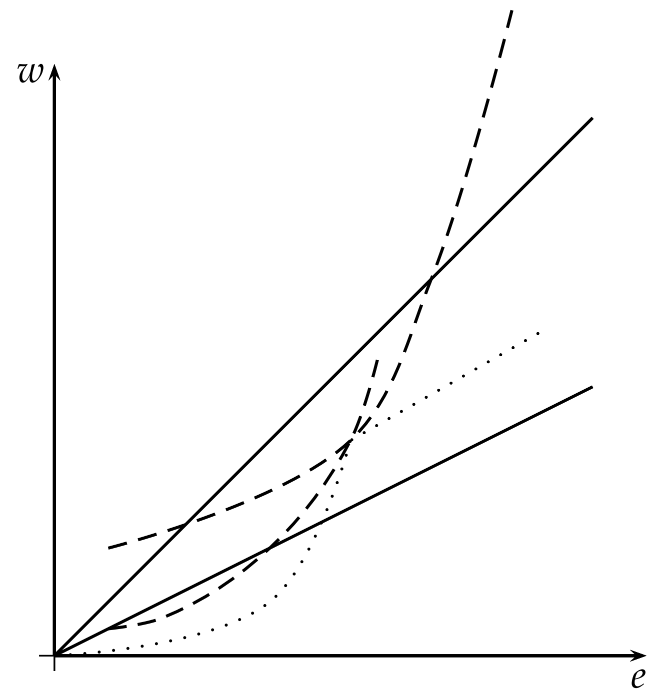
Die gepunktete Kurve zeigt den erwarteten Lohn. In einem separierenden Gleichgewicht wählen beiden Typen unterschiedliche Ausbildungsniveaus.



Hier ist ein anderes separierendes Gleichgewicht:



Hier ist ein pooling Gleichgewicht:



11 Anhang

Hyperlinks im Text verweisen auf die folgenden Definitionen:

Definition 26 (Abgeschlossen)**.** Eine Menge ist abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Das Intervall $[0, 1]$ ist z.B. abgeschlossen, weil die Randpunkte 0 und 1 im Intervall enthalten sind. Das offene Intervall $(0, 1)$ ist nicht abgeschlossen, weil die Randpunkte 0 und 1 nicht im Intervall enthalten sind.

Definition 27 (Beschränkt)**.** Eine Menge S ist nach oben beschränkt, wenn es ein b gibt, so dass für alle $x \in S$ gilt $x \leq b$.

Definition 28 (Free Disposal)**.** Eine Menge X erfüllt „free disposal" genau dann, wenn für alle $x \in X$ gilt, dass jedes $y \leq x$ ebenfalls in X liegt.

In der Spieltheorie werden Elemente dieser Mengen oftmals als Nutzen interpretiert. Wenn es also möglich ist, dass Spieler individuelle Nutzenniveaus $x_1, x_2, \ldots$ erreichen, so ist es auch möglich (durch Kooperation) einen Zustand zu erreichen, in dem es einigen, aber nicht allen Spielern beliebig schlechter geht.

Literatur

[1] Kenneth Binmore. Fun and Games. D. C. Heath, Lexington, MA., 1992.

[2] Drew Fudenberg and Jean Tirole. Game Theory. MIT Press, 1995.

[3] Robert Gibbons. Game Theory for applied Economists. Princeton University Press, 1992.

[4] Martin Osborne and Ariel Rubinstein. A Course in Game Theory. MIT Press, 1995.

[5] Reinhard Selten. The chain store paradox. Theory and Decision, 9:127–159, 1978.