Explain all your answers in a clear, concise and legible way. Make clear which of your answers belongs to which question. Make also clear what is an answer and what is only an intermediate result. If you can not find an answer for some of the questions in the given time, explain clearly and briefly how you would proceed if you had more time. If you come to the conclusion that in a given case an equilibrium does not exist, explain why it does not exist. Write clearly and legibly!

Begründen Sie Ihre Antworten klar, knapp und lesbar. Machen Sie klar, welche Antworten zu welcher Frage gehören. Machen Sie auch klar, was ein Zwischenergebnis und was eine Antwort ist. Wenn Sie für einige Fragen in der gegebenen Zeit keine Antwort finden, erklären Sie klar und deutlich, wie man weiter vorgehen sollte. Wenn Sie zu dem Ergebnis kommen, dass es für einen gegebenen Fall kein Gleichgewicht gibt, erkären Sie, warum es keines gibt. Schreiben Sie klar und leserlich!

1. Consider a two player bargaining problem $\langle S, d\rangle$ where S and d have the usual interpretation (S is a set of pairs of utilities associated with possible outcomes of the bargaining process and d is the disagreement point). Be F^E the element $x \in S$ that maximises x_1, i.e. the outcome preferred by player 1.
   (a) Under the usual assumptions on S and d, does a solution F^E always exist? Is it always unique? If not, give a counterexample, if yes, give a brief proof. If the proof is obvious, explain why!
   (b) Which axioms that we discussed in the context of Nash's bargaining solution are fulfilled by F^E, and which are not? Give a counterexample for each axiom that is not fulfilled and give a brief proof for each axiom that is fulfilled. If the proof is obvious, explain why!

(1) Betrachten Sie ein Verhandlungsproblem für zwei Spieler $\langle S, d\rangle$ in dem S und d die übliche Bedeutung haben (S ist eine Menge von Nutzenpaaren die mit möglichen Verhandlungsergebnissen assoziiert sind, und d ist der „disagreement point"). Sei F^E das Element $x \in S$ das x_1 maximiert, d.h. das Ergebnis das von Spieler 1 vorgezogen wird.

(1a) Existiert unter den üblichen Annahmen an S und d stets eine Lösung F^E? Ist sie immer eindeutig? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel, falls doch, geben Sie einen kurzen Beweis an. Wenn der Beweis offensichtlich ist, erklären Sie warum!

(1b) Welche Axiome die wir im Zusammenhang mit der Nash Verhandlungslösung diskutiert haben, werden durch F^E erfüllt, und welche nicht? Geben Sie für jedes Axiom das nicht erfüllt ist ein Gegenbeispiel, und für jedes erfüllte Axiom einen kurzen Beweis an. Wenn der Beweis offensichtlich ist, erklären Sie warum!

2. Consider the following pair of strategies in a game of alternating offers with a constant discount factor δ. The share of player 1 is called x_1, the share of player 2 is called x_2.

(2) Betrachten Sie das folgende Paar von Strategien in einem Spiel mit wechselnden Angeboten und einem konstanten Diskontfaktor δ. Wir bezeichnen mit x_1 den Anteil von Spieler 1 und mit x_2 den Anteil von Spieler 2.

	A	B
1 proposes	$(x^*, 1-x^*)$	$(1,0)$
1 accepts	$x_1 \geq \delta x^*$	$x_1 = 1$
2 proposes	$(\delta x^*, 1-\delta x^*)$	$(1,0)$
2 accepts	$x_2 \geq \delta - \delta^2 x^*$	$x_2 \geq 0$
transitions	go to B if a proposal was rejected	

   (a) For which values of x^* is this a Nash equilibrium?
   (b) For which values of x^* is this a subgame-perfect equilibrium?

(2a) Für welche Werte von x^* ist das ein Nash Gleichgewicht?

(2b) Für welche Werte von x^* ist das ein teilspielperfektes Gleichgewicht?

3. Consider the model of a steady state market with decentralised trade. Sellers and buyers always choose the Nash solution when bargaining. Be the number of sellers S only slightly larger than the number of buyers B. In contrast to the model discussed in the lecture, let us assume that traders which are not matched in a given period have priority in the next period, i.e. they will be matched before any other, newly arrived traders are matched. If you wish, you can imagine them being in a queue where new traders always enter the end of the queue.
   If S is only slightly larger than B, what is a price p in the market?

4. Consider a standard bargaining game with alternating offers, but now with four players. In the first round player 1 makes a proposal how a cake of a fixed size is distributed among the four. Then the other three decide simultaneously whether to accept or reject. Only if the three unanimously accept the proposal the game ends and the proposal is implemnted. Otherwise the cake shrinks by a factor of δ and player 2 makes a proposal, the other three decide simultaneously..., then player 3 makes a proposal, the other three decide simultaneously..., then player 4 makes a proposal, the other three decide simultaneously,... and then the game continues again with player 1 and goes on as described above.

   Illustrate your answers to the following questions with the help of an example is possible.

   (a) Is there a Nash equilibrium where agreement is reached in the first round that the cake is divided evenly?
   (b) Is there a subgame perfect equilibrium where agreement is reached in the first round that that the cake is divided evenly?
   (c) Is there a subgame perfect equilibrium where agreement is reached in the first round that player 2 gets all the cake?
   (d) Is there a subgame perfect equilibrium where agreement is reached only in the fifth round?
   (e) Does the solution of the game change if the three remaining players do not have to accept unanimously but a majority is sufficient?
   (f) What is if only a single player must accept for the game to end and the proposal to be implemented?

(3) Betrachten Sie das Modell eines Marktes in einem stationären Zustand mit dezentralem Handel. Käufer und Verkäufer wählen immer die Nash Verhandlungslösung. Die Anzahl der Verkäufer S ist nur wenig größer als die Anzahl der Käufer B. Anders als im Modell das wir in der Vorlesung diskutiert haben, nehmen wir nun an dass Händler, die nicht in einer gegebenen Periode einen Partner finden, in der nächsten Periode Priorität haben, d.h. sie finden einen Partner, bevor andere, neu hinzugekommene Händler einen Partner finden. Sie können sich z.B. vorstellen, dass Händler eine Warteschlange bilden, in der neue Händler stets das Ende der Schlange bilden. Wenn S nur wenig größer ist als B, was ist dann der Preis p im Markt?

(4) Betrachten Sie das Ihnen bekannte Verhandlungsspiel mit alternierenden Vorschlägen, aber nur mit vier Spielern. In der ersten Runde macht Spieler 1 einen Vorschlag wie ein Kuchen einer fixen Größe unter den vieren aufgeteilt wird. Dann entscheiden die anderen drei gleichzeitig, ob sie annehmen oder ablehnen sollen. Nur wenn die drei einstimmig den Vorschlag annehmen endet das Spiel und der Vorschlag wird umgesetzt. Ansonsten schrumpft der Kuchen um den Faktor δ und Spieler 2 macht einen Vorschlag, danach entscheiden die anderen drei gleichzeitig,... dann macht Spieler 3 einen Vorschlag, danach entscheiden die anderen drei gleichzeitig,... dann macht Spieler 4 einen Vorschlag, danach entscheiden die anderen drei gleichzeitig,... und dann geht das Spiel wieder mit Spieler 1 wie oben beschrieben weiter.

(4) Erläutern Sie Ihre Antworten zu den folgenden Fragen wenn möglich mit einem Beispiel.

(4a) Gibt es ein Nash Gleichgewicht in dem sich die Spieler in der erster Runde einigen dass der Kuchen zu gleichen Teilen aufgeteilt wird?

(4b) Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem sich die Spieler in der erster Runde einigen dass der Kuchen zu gleichen Teilen aufgeteilt wird?

(4c) Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem sich die Spieler in der erster Runde einigen dass Spieler 2 den gesamten Kuchen bekommt?

(4d) Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem sich die Spieler erst in der fünften Runde einigen?

(4e) Ändert sich die Lösung des Spiels wenn die drei verbleibenden Spieler nicht mehr einstimmg zustimmen müssen, sondern eine einfache Mehrheit reicht?

(4f) Was passiert wenn nur noch ein einziger Spieler zustimmen muss, damit das Spiel endet und der Vorschlag implementiert wird?