Spieltheorie, WS 03/04
Februar 04
Oliver Kirchkamp

- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt, welche Aufgaben Sie darauf lösen.
- Begründen Sie bitte alle Ihre Antworten!
- Viel Erfolg!

Aufgabe 1:

Betrachten Sie bitte das folgende Spiel in Normalform:

Spieler I \ Spieler II	L	R
T	0, 0	a, 4
D	4, a	4, 4

1a) Sei $a = 4$. Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte des Spiels.

1b) Das Spiel wird nun dreimal gespielt. Die Auszahlung des wiederholten Spiels ist die Summer der Auszahlungen der einzelnen Perioden. Beide Spieler können in jeder Wiederholung beobachten, was vorher gespielt wurde.

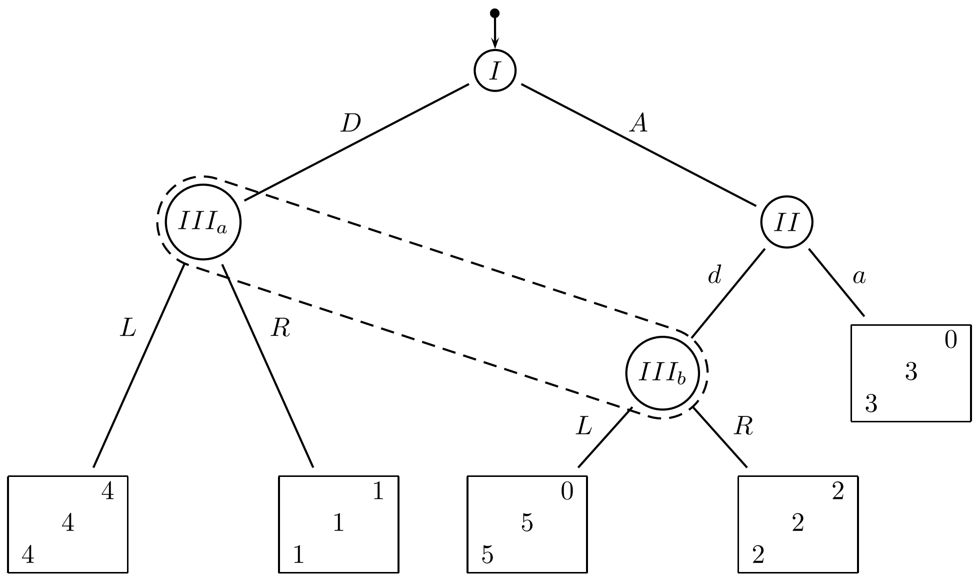
1b-i) Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem in einer der Perioden T, L gespielt wird.

1b-ii) Was können Sie über die teilspielperfekten Gleichgewichte sagen?

1c) Was muss für a gelten, damit es im dreimal gespielten Spiel ein teilspielperfektes Gleichgewicht gibt, in dem in der ersten Periode T, L gespielt wird.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das folgende Spiel in extensiver Form. Die Auszahlungen von Spieler I sind links unten, die Auszahlungen von Spieler II in der Mitte, und die Auszahlungen von Spieler III sind rechts oben angegeben. Spieler III kann nicht unterscheiden, ob er sich in Knoten III_a oder III_b befindet.



2a) Welche Lösungskonzept ist für dieses Spiel angemessen.

2b) Wenden Sie das Lösungskonzept an, und bestimmen Sie **alle** Gleichgewichte.

2c) Gibt es unter den Gleichgewichten solche die mehr und solche die weniger plausibel sind?

Aufgabe 3:

Ein Nash-Verhandlungsproblem wird durch einen Verhandlungsbereich S und durch einen Drohpunkt d beschrieben. Wir nehmen an, dass S kompakt ist und dass d in S liegt. Eine Verhandlungslösung ist eine Funktion $f(S,d)$ die einen Punkt aus S auswählt.

Erinnern Sie sich, dass die Nash-Verhandlungslösung beschrieben werden kann als Funktion $f^N(S,d)$ die dem Problem (S,d) das folgende Element s_1, s_2 aus S zuordnet:

$$\underset{(d_1,d_2)\leq(s_1,s_2)\in S}{\arg\max} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$$

3a) Betrachten Sie nun die folgende Lösung eines Verhandlungsproblems, nach der die Spieler stets den durch den Drohpunkt festgelegten Nutzen erhalten.

Welche Axiome der Nash-Verhandlungslösung werden durch diese Lösung erfüllt, welche nicht.

3b) Betrachten Sie nun die Lösung $f^G(S,d)$ eines Verhandlungsproblems die dem Problem (S,d) das folgende Element s_1, s_2 aus S zuordnet:

$$\underset{(d_1,d_2)\leq(s_1,s_2)\in S}{\arg\max} \sqrt{s_1 - d_1} + \sqrt{s_2 - d_2}$$

und untersuchen Sie das Verhandlungsproblem (S,d) in dem $d = (0,0)$ und S die konvexe Hülle der Punkte $(0,0)$, $(1,0)$, und $(0,2)$ ist (das heißt, S ist die dreieckige Fläche, die diese Punkte als Eckpunkte hat).

Was ist f^G für dieses Problem? Was ist f^N für dieses Problem?

3c) Sei nun (S,d) wieder ein allgemeines Problem. Welche Axiome der Nash-Verhandlungslösung werden durch f^G (definiert wie in 3b) erfüllt, welche nicht. Begründen Sie für jedes Axiom Ihre Antwort durch eine kurze Rechung.

Aufgabe 4:

Zwei Werbeagenturen, A und B, bewerben sich um einen Auftrag. Wenn sie nichts tun haben sie die gleichen Chancen, den Auftrag zu bekommen. Sie können jeweils eine Präsentation vorbereiten, um ihre Chancen zu verbessern. Falls das nur eine Agentur macht, bekommt sie den Auftrag, falls beide das tun, sind die Chancen gleich.

4a) Nehmen Sie an, dass die Kosten eine Präsentation vorzubereiten 1000 sind. Der Auftrag hat einen Wert von W.

Was werden die Agenturen im Gleichgewicht machen? Wie hängen die Gleichgewichte von W ab?

4b) Jetzt nehmen Sie an, dass die Agenturen mehr oder weniger in die Präsentation investieren können. Agentur A wählt eine Investition e_A und Agentur B wählt eine Investition e_B. Die Investition e_A und e_B wird in den gleichen Geldeinheiten gemessen wie W. Wenn Agentur i den Auftrag bekommt, hat sie einen Reingewinn von $W - e_i$, wenn sie den Auftrag nicht bekommt, ist der Reingewinn $-e_i$.

Wenn $e_A > e_B$ bekommt A den Auftrag, wenn $e_A < e_B$ bekommt B den Auftrag. Falls $e_A = e_B$ entscheidet das Los und beide haben die gleichen Chancen.

Nehmen Sie zunächst an, dass die Investitionen e_A und e_B nach oben beschränkt sind und nicht größer als αW sein können.

Sei $\alpha = 1/2$. Was ist nun ein Gleichgewicht?

4c) Sei $\alpha = 1$. Was kann man nun über das Gleichgewicht sagen? Gibt es gemischte Gleichgewichte?

4d) Nun sei die Investition nicht mehr nach oben beschränkt. Was kann man nun über das Gleichgewicht sagen? Gibt es gemischte Gleichgewichte?

4e) Nehmen Sie nun an, dass nicht mehr die Agentur mit der größeren Investition den Auftrag, und damit den Gewinn von W erhält. Statt dessen geht der Auftrag mit Wahrscheinlichkeit $e_A/(e_A + e_B)$ an A und mit Wahrscheinlichkeit $e_B/(e_A + e_B)$ an B.

Was ist jetzt ein Gleichgewicht?