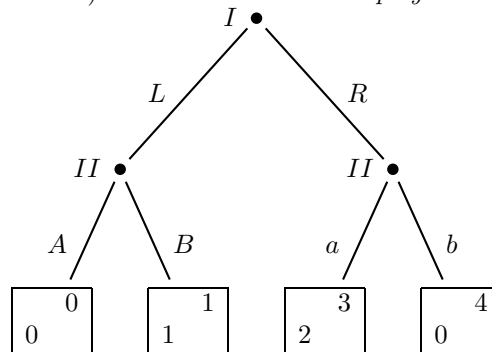


1. Aufgabe

Betrachten Sie folgendes Spiel  $\mathcal{G}$  in extensiver Form (Die Auszahlung von Spieler  $I$  steht jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler  $II$  steht oben rechts):



Consider the following game  $\mathcal{G}$  in extensive form (payoffs of player  $I$  are bottom left, payoffs of player  $II$  are top right):

- (a)
- i. Transformieren Sie das Spiel in Normalform.
  - ii. Bestimmen Sie **alle** Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.
  - iii. Das Normalformspiel wird nun zweimal hintereinander gespielt. Die Auszahlung des wiederholten Spiels ist die Summe der Auszahlungen des Stufenspiels. Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in reinen Strategien, in dem Spieler  $I$  mehr als 2 bekommt? Warum?
  - iv. Bestimmen Sie für das Spiel  $\mathcal{G}$  in extensiver Form die teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien.
- (b) Betrachten Sie nun ein Nash Verhandlungsspiel über die Auszahlungen von  $\mathcal{G}$  (die „Verhandlungsmacht“ beider Spieler sei gleich). Nehmen Sie an, dass Spieler beliebig Nutzen transferieren können. Der Drohpunkt (Disagreementpoint) sei die Auszahlung eines teilspielperfekten Gleichgewichtes von  $\mathcal{G}$  (Falls Sie in Aufgabe 1(a)iv mehrere teilspielperfekte Gleichgewichte gefunden haben, geben Sie an welches Sie wählen).
- i. Was ist die Nash Verhandlungslösung
  - ii. Nehmen Sie nun an, daß Nutzen nicht transferiert werden kann. Lotterien über Auszahlungen sind aber möglich. Was ist jetzt die Nash Verhandlungslösung
- (c) Betrachten Sie nun das Nash threat game: Spieler wählen Strategien die den Drohpunkt der Nash Verhandlungsspiels liefern. Setzen Sie transferierbaren Nutzen voraus.
- i. Finden Sie Sie **alle** Gleichgewichte des Nash Threat Game.
  - ii. Welche Nash-Verhandlungslösung ergibt sich für jedes der Gleichgewichte aus 1(c)i?
- (d) In Aufgabe 1(a)ii haben Sie alle Nash-Gleichgewichte von  $\mathcal{G}$  in *reinen* Strategien berechnet.
- i. Zeigen Sie, daß es ein Nash-Gleichgewicht von  $\mathcal{G}$  gibt, in welchem Spieler  $II$  eine gemischte Strategie verwendet.
  - ii. Zeigen Sie, daß es **kein** Nash-Gleichgewicht von  $\mathcal{G}$  gibt, in welchem Spieler  $I$  eine gemischte Strategie verwendet.

*Transform this game into normal form. Determine **all** Nash-equilibria in pure strategies. The normal form game is now played two times. Payoffs of the repeated game are sums of stage game payoffs. Is there a subgame perfect equilibrium in pure strategies such that player  $I$  obtains more than 2? Why?*

*Determine all subgame perfect equilibria in pure strategies for the game in extensive form.*

*Consider now a Nash bargaining game based on the payoffs of the game  $\mathcal{G}$  (both players have equal “bargaining power”). Assume that players can transfer utility without restriction. The disagreement point is given as the payoff of a subgame perfect equilibrium of  $\mathcal{G}$ . (If you found several equilibria in problem 1(a)iv indicate which one you choose).*

*What is the Nash bargaining solution. Now assume that players can no longer transfer utility. Lotteries over payoffs are still possible. What is now the Nash bargaining solution.*

*Now consider the Nash threat game: players choose strategies that determine the threat point of the Nash bargaining game. Assume transferable utility.*

*Find **all** equilibria of the Nash threat game.*

*For each equilibrium that you have found in 1(c)i, what is the Nash bargaining solution?*

*In problem 1(a)ii you have determined all Nash equilibria of  $\mathcal{G}$  in pure strategies.*

*Show that there is a Nash equilibrium of  $\mathcal{G}$  where player  $II$  plays a mixed strategy.*

*Show that there is **no** Nash equilibrium of  $\mathcal{G}$  where player  $I$  plays a mixed strategy.*

2. Aufgabe

Finden Sie alle Nash Gleichgewichte im folgenden Spiel. Erklären Sie, warum es keine weiteren Gleichgewichte gibt?

Find all Nash equilibria in the following game. Explain why there are no further equilibria?

		Spieler II		
		A	B	C
Spieler I	a	0	4	5
	b	5	0	4
	c	4	0	5

3. Aufgabe

Betrachten Sie ein Rubinstein-Verhandlungsspiel in dem ein Dollar aufgeteilt werden soll. Auszahlungen werden nicht abdiskontiert aber in jeder Periode, in der sich die Spieler nicht einigen, entstehen den Spielern Kosten. Die Kosten sind  $c_1$  pro Periode für Spieler 1 und  $c_2$  für Spieler 2. Nehmen Sie an dass  $c_1 + c_2 < 1$ .

Consider the following Rubinstein bargaining game where one Dollar is to be divided. Payoffs are not discounted but for each period where players do not come to an agreement they incur a cost. The cost is  $c_1$  per period for player 1 and  $c_2$  for player 2. Assume that  $c_1 + c_2 < 1$ .

- (a) Nehmen Sie an, dass  $c_1 < c_2$ , d.h. Spieler 2 hat größere Kosten. Was ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht des Spiels? Warum?
- (b) Nehmen Sie nun an, dass  $c_1 > c_2$ , d.h. Spieler 1 hat größere Kosten. Was ist nun ein teilspielperfektes Gleichgewicht des Spiels? Warum?
- (c) Was ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht des Spiels wenn  $c_1 = c_2$ ? Warum?

- (a) Assume that  $c_1 < c_2$ , i.e. player 2 has higher cost. What is a subgame perfect equilibrium of the game? Why?
- (b) Now assume that  $c_1 > c_2$ , i.e. player 1 has higher cost. What is now a subgame perfect equilibrium of the game? Why?
- (c) What is a subgame perfect equilibrium of the game when  $c_1 = c_2$ ? Why?

4. Aufgabe

Zwei Leute, 1 und 2, können zur Produktion eines öffentlichen Gutes beitragen. Wenn mindestens eine Person „beiträgt“, haben beide einen Nutzen von 4. Wenn niemand beiträgt, ist der Nutzen für beide Null. Wenn Spieler 1 zur Produktion beiträgt, entstehen ihm Kosten  $c_1$ . Wenn Spieler 2 zur Produktion beiträgt, entstehen ihm Kosten  $c_2$ . Die folgende Matrix gibt für jede Strategienkombination die Auszahlung der Spieler an:

Two people, 1 and 2, can contribute to the production of a public good. As long as at least one person contributes both have a utility of 4. Player 1 can contribute at a cost  $c_1$ . Player 2 can contribute at a cost  $c_2$ . The following matrix shows for each combination of strategies the payoffs of both players:

		Spieler 2	
		beitragen (contribute)	nicht beitragen (do not contribute)
Spieler 1	beitragen (contribute)	$4 - c_2$	4
	nicht beitragen (do not contribute)	$4 - c_2$	0

Der Betrag  $c_1$  kann die Werte 1 und 3 annehmen. Der Betrag  $c_2$  kann ebenfalls die Werte 1 und 3 annehmen. Jeder Spieler  $i \in \{1, 2\}$  kennt sein eigenes  $c_i$ , aber nicht das seines Gegenüber. Es ist common knowledge, daß unabhängig voneinander der Betrag von  $c_i$  mit Wahrscheinlichkeit  $p$  den Wert 3 annimmt. Zeigen Sie, daß für  $\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{3}{4}$  ein Bayesianisches Gleichgewicht existiert, in dem Spieler mit niedrigem  $c_i$  beitragen und solche mit hohem  $c_i$  nicht.

The cost  $c_1$  is either 1 or 3. Also  $c_2$  is either 1 or 3. Each player  $i \in \{1, 2\}$  knows his own  $c_i$ , but not the cost of his opponent. It is common knowledge that  $c_i$  has the value 3 with probability  $p$  independetly of the realisation of the other  $c_i$ . Show that for  $\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{3}{4}$  there is a Bayesian equilibrium where players with a small  $c_i$  contribute and those with a large  $c_i$  do not.