Spieltheorie, WS 02/03
Februar 03
Oliver Kirchkamp

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes symmetrisches Zweipersonenspiel:

Consider the following symmetric two-person game:

Spieler 2

		t_1	t_2	t_3	t_4
Spieler 1	s_1	3 3	2 5	2 7	2 1
	s_2	5 2	4 4	7 x	6 0
	s_3	7 2	x 7	0 0	0 1
	s_4	1 2	0 6	1 0	2 2

Die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links angegeben, die von Spieler 2 jeweils oben rechts.

Payoffs of player I are written bottom left, payoffs of player II are written top right

a) Wir beginnen mit dem Fall $x = 0$.

We start with the case $x = 0$.

  (i) Welche Strategien sind strikt dominiert? Warum?

  Which strategies are strictly dominated? Why?

  (ii) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien. Begründen Sie ihre Antwort.

  Determine all Nash equilibria in pure strategies. Explain your answer.

b) Nun sei x beliebig. Finden Sie alle Werte von x für die sich vier Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien ergeben. Begründen Sie ihre Antwort.

Now x can be any number. Find all values of x such that we have four Nash equilibria in pure strategies. Explain your answer.

c) Wir kehren wieder zurück zum Fall $x = 0$. Das Spiel werde nun unendlich oft wiederholt. Auszahlungen werden mit dem Diskontfaktor $\delta = 3/5$ abdiskontiert. Gibt es ein Gleichgewicht, in dem in allen Perioden s_2, t_2 gespielt wird? Falls ja, geben Sie ein Beispiel für eine Strategiekombination die zu einem solchen Gleichgewicht führt und begründen Sie Ihre Antwort.

We return to the case $x = 0$. The game is repeated infinitely often. Payoffs are discounted with the factor $\delta = 3/5$. Is there an equilibrium where players play s_2, t_2 in each period? If so, give an example for a combination of strategies that yields such an equilibrium and explain your answer.

d) Wir bleiben bei $x = 0$, betrachten aber nun das unendlich oft wiederholte Spiel in dem die Auszahlungen als "limit of the means" bestimmt werden. Geben Sie mit Hilfe einer Graphik an, welche Kombinationen von Auszahlungen der beiden Spieler im teilspielperfekten Gleichgewicht erreicht werden können. Begründen Sie Ihre Antwort.

We still assume $x = 0$ and consider the infinitely repeated game where payoffs are determined as "limit of the means". Use a figure to describe which combinations of payoffs for both players can be reached in equilibrium. Explain your answer.

Aufgabe 2:

Zwei Spieler spielen das folgende Normalformspiel $\mathcal{G}$, wobei c ein fest vorgegebener positiver Parameter ist ($c \geq 0$, die Auszahlung von Spieler I steht jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler *II* steht oben rechts):

Two players play the following game $\mathcal{G}$ in normal form. Be c a fixed given posive parameter ($c \geq 0$, payoffs of player I are written bottom left, payoffs of player II are written top right):

$\mathcal{G}$: Spieler *II*

		L	R
Spieler I	T	1 $3-c$	0 $-c$
	B	0 0	3 1

a) Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte für den Fall $0 \leq c \leq 3$ (Hinweis: Betrachten Sie den Fall $c = 3$ gesondert.).

Determine all Nash equilibria for $0 \leq c \leq 3$ (hint: consider the case $c = 3$ seperately.).

b) Nun haben sich die Spieler darauf geeinigt, vor Spielbeginn einmal eine Münze zu werfen. Beide Spieler beobachten das Ergebnis, Kopf oder Zahl.

Now players have agreed upon tossing a coin once before play. Both players observe the result, head or tails.

  (i) Wieviele reine Strategien hat Spieler I jetzt? Schreiben Sie die Strategien auf und denken Sie daran, Ihre Notation zu erklären.

  How many pure strategies has player I now. Write them down and do not forget to explain your notation.

  (ii) Es sei nun $c = 0$. Stellen Sie graphisch für das erweiterte Spiel alle im Gleichgewicht erreichbaren Auszahlungen dar (beschriften Sie bitte die Graphik klar und begründen Sie Ihr Ergebnis).

  Now be $c = 0$ Show graphically all payoffs that can be reached in the equilibrium of the extended game (label your figure clearly and explain your result).

c) Anstatt eine Münze zu werfen, engagieren die Spieler einen Schiedsrichter (dabei entstehen keine Kosten). Der Schiedsrichter wählt einen der Ausgänge (T, L), (T, R) und (B, R) aus, und zwar jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/3$. Gegeben diese Auswahl empfiehlt er jedem Spieler nur dessen Strategie, sagt also Spieler I ob er T oder B spielen soll, und Spieler *II* ob er L oder R spielen soll.

Instead of tossing a coin players hire a referee (costlessly). The referee chooses one of the outcomes (T, L), (T, R) and (B, R), each with probability $1/3$. Given this choice he recommends each player only his strategy, i.e. tells player I whether to play T or B, and tells player II whether to play L or R.

  (i) Was sind die Beliefs der beiden Spieler in ihren jeweiligen Informationsbezirken?

  What are the beliefs of the two players in their information sets?

  (ii) Für welche positiven Werte von c ($c \geq 0$) gibt es ein Bayesianisches Gleichgewicht in dem sich beide Spieler immer an die Empfehlung des Schiedsrichters halten?

  For which positive values of c ($c \geq 0$) is there a Bayesian Equilibrium where players always follow the recommendation of the referee?

d) Betrachten Sie das Spiel, in welchem zuerst Spieler I seine Aktion wählt, Spieler II dies beobachtet und anschließend seine Aktion wählt.

Consider the game where first player I chooses his action. Player II observes this action before choosing his own.

- (i) Zeichnen Sie diesen Spielverlauf in extensiver Form.

  Draw the game in extensive form.

- (ii) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte.

  Determine all subgame perfect equilibria

e) Betrachten Sie nun folgende Zeitstruktur für $c = 0$:

Periode 1: Spieler I legt sich fest, ob er T oder B spielen wird.

Spieler II kann sich simultan auf L oder R festlegen, oder warten, bis er in Periode 2 über die Entscheidung von Spieler I informiert wird.

Periode 2: Wenn Spieler II gewartet hat, so wird er jetzt über die Entscheidung (T oder B) von Spieler I informiert und muß sich dann auf seine Aktion L oder R festlegen.

Die Auszahlungen beider Spieler werden mit dem Diskontfaktor $\delta = \frac{2}{3}$ abdiskontiert falls Spieler II wartet und sich erst in Periode 2 entscheidet.

Consider the following time structure for $c = 0$

Period 1: *Player I decides whether to play T or B*

Simultaneously player II can choose L or R or wait until he will be informed about player I's choice in period 2.

Period 2: *If player II did wait then he will now be informed about the choice (T or B) of player I and has to choose his action L or R.*

Payoffs of both players will be discounted with a factor $\delta = \frac{2}{3}$ if player II waits and decides only in period 2.

- (i) Zeichnen Sie den Spielverlauf in extensiver Form.

  Draw the game tree in extensive form.

- (ii) Wieviele reine Strategien hat Spieler I, wieviele hat Spieler II?

  How many pure strategies has player I, how many has player II?

- (iii) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien.

  Determine all subgame perfect equilibria in pure strategies.

- (iv) Finden Sie ein Nash Gleichgewicht, das nicht teilspielperfekt ist.

  Find a Nash equilibrium that is not subgame perfect.

- (v) Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht, in dem Spieler II in Periode 1 zwischen seinen Aktionen L und R mischt und nie bis Periode 2 wartet?

  Is there a subgame perfect equilibrium where player II randomises in period 1 over his actions L and R and never waits until period 2?

f) Betrachten Sie nun folgende Zeitstruktur ($c = 0$):

Periode 1: Spieler I kann sich auf T oder B festlegen *oder* er kann warten.

Spieler II kann sich auf L oder R festlegen *oder* er kann warten.

Periode 2: Jeder Spieler der gewartet hat, wird jetzt über die Entscheidung seines Opponenten (T oder B oder warten, bzw. L oder R oder warten) informiert. Danach muß sich der Spieler auf T oder B bzw. L oder R festlegen.

Now consider the following time structure ($c = 0$):

Period 1: *Player I can choose T or B* or *he can wait.*

Player II can choose L or R or *he can wait.*

Period 2: *Players who waited are now informed about the decision of their opponent (T or B or wait, or L or B or wait). Thereafter players choose T or B in case of player I or L or R in case of player II.*

Sobald sich beide Spieler auf ihre Aktion im Spiel $\mathcal{G}$ festgelegt haben, erhalten sie die dort beschriebenen Auszahlungen. Falls sich einer oder beide Spieler erst in Periode 2 entscheiden, werden die Auszahlungen beider Spieler mit dem Diskontfaktor $\delta = \frac{2}{3}$ abdiskontiert.

As soon as both players have chosen their action for the game $\mathcal{G}$ they obtain the payoffs of this game. If one or both players chose their action only in period 2, payoffs of both players will be discounted with a factor $\delta = \frac{2}{3}$.

(i) Zeichnen Sie den Spielverlauf in extensiver Form.

Draw the game tree in extensive form.

(ii) Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in reinen Strategien in dem beide Spieler warten und in in der zweiten Periode (T, L) gespielt wird?

Is there a subgame perfect equilibrium in pure strategies where both players wait and choose (T, L) in the second period?

Aufgabe 3:

In einem modifizierten Rubinstein-Verhandlungsspiel soll ein Dollar aufgeteilt werden. In Periode 1 macht Spieler 1 einen Vorschlag. Falls das Spiel nicht in dieser Periode endet, macht in Periode 2 Spieler 2 einen Vorschlag. Falls das Spiel nicht endet, macht dann in Periode 3 wieder Spieler 1 einen Vorschlag,...

In a modified Rubinstein bargaining game one Dollar has to be diveded. In period 1 player 1 makes an offer. If the game does not end in this period, player 2 makes an offer in period 2. If the game does not end in this period, player 1 makes an offer in period 3,...

Wenn Spieler i einen Vorschlag $(x_i, 1 - x_i)$ macht, wie der Dollar aufgeteilt werden soll, dann hat der andere Spieler (nennen wir ihn j) drei Möglichkeiten:

Assume that player i makes an offer $(x_i, 1 - x_i)$ how to divide the Dollar. Then the other player (call him j) has three options:

- Spieler j kann den Vorschlag annehmen. In diesem Fall endet das Spiel, Spieler 1 erhält x_i, und Spieler 2 erhält $1 - x_i$.

  Player j can accept the offer. In this case the game ends, player 1 obtains x_i, and player 2 obtains $1 - x_i$.

- Spieler j kann eine “outside-option” wählen. In dem Fall endet das Spiel, Spieler j bekommt x_0, Spieler i bekommt nichts.

  Player j can choose an “outside-option”. In this case the game ends. Player j obtains x_0, player i obtains nothing.

- Spieler j kann nichts tun. Dann geht das Spiel in der nächsten Periode weiter. In dieser Periode macht nun Spieler j einen Vorschlag wie oben, Spieler i kann diesen Vorschlag annehmen, oder die “outside-option” wählen, oder nichts tun...

  Player j can do nothing. In this case the game continues in the next period. In this period player j makes an offer as above, player i can accept this offer, choose the “outside-option” or do nothing...

Der Diskontfaktor $\delta \in (0, 1)$ ist für beide Spieler gleich.

The discount factor $\delta \in (0, 1)$ is the same for both players.

Nehmen Sie an dass $x_0 < \delta/(1+\delta)$ (für beide Spieler gleich). Was ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht dieses Spiels. Begründen Sie Ihre Antwort.

Assume that $x_0 < \delta/(1 + \delta)$ (the same for both players). What is a subgame perfect equilibrium of this game. Explain your answer.