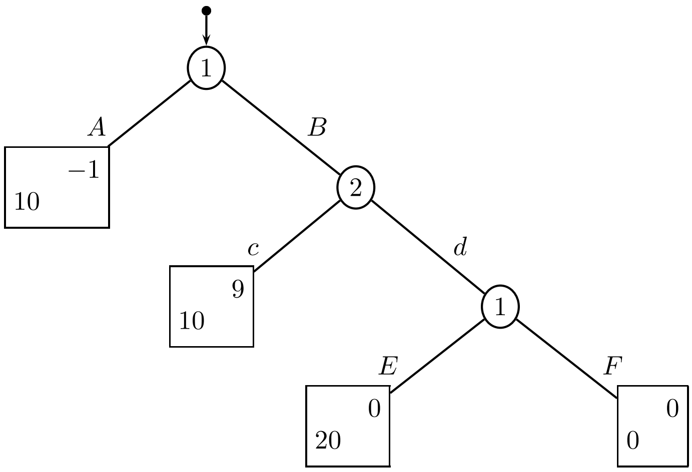
Klausur in Spieltheorie I, 14. Februar 2001, Oliver Kirchkamp

**Bearbeiten Sie bitte die folgenden drei Aufgaben**

1. Aufgabe

   Betrachten Sie folgendes Spiel $\mathcal{G}$:




   (Die Auszahlungen für Spieler 1 stehen unten links, die für Spieler 2 oben rechts).

   (a) Zählen Sie alle reinen Strategien von Spieler 1 auf.

   (b) Schreiben Sie das Spiel in Bimatrixform!

   (c) Finden Sie **alle** Nash-Gleichgewichte des Spiels $\mathcal{G}$!

   (d) Finden Sie **alle** teilspielperfekten Gleichgewichte des Spiels $\mathcal{G}$!

   (e) Das Spiel $\mathcal{G}$ wird nun zweimal hintereinander gespielt. Die Auszahlung des wiederholten Spiels ist die Summe der Auszahlungen der beiden Perioden.

   Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht des wiederholten Spieles, so daß Spieler 1 einen Payoff von 30 und Spieler 2 einen Payoff von 9 erhält? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Aufgabe

   In einem Rubinstein-Verhandlungsspiel machen zwei Spieler abwechselnd einen Vorschlag, wie ein „schrumpfender Kuchen“ aufzuteilen ist. Erst macht Spieler 1 einen Vorschlag, dann Spieler 2, dann wieder Spieler 1, usw. Es sind nur Vorschläge erlaubt, bei denen entweder einer der Spieler den gesamten Kuchen bekommt, oder bei denen der Kuchen zu gleichen Teilen aufgeteilt wird. Die zulässigen Vorschläge sind also $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Die erste Zahl gibt stets den Anteil von Spieler 1, die zweite Zahl stets den Anteil von Spieler 2 an. Benutzen Sie bitte für die Lösung diese Notation um Vorschläge (Züge) beschreiben.

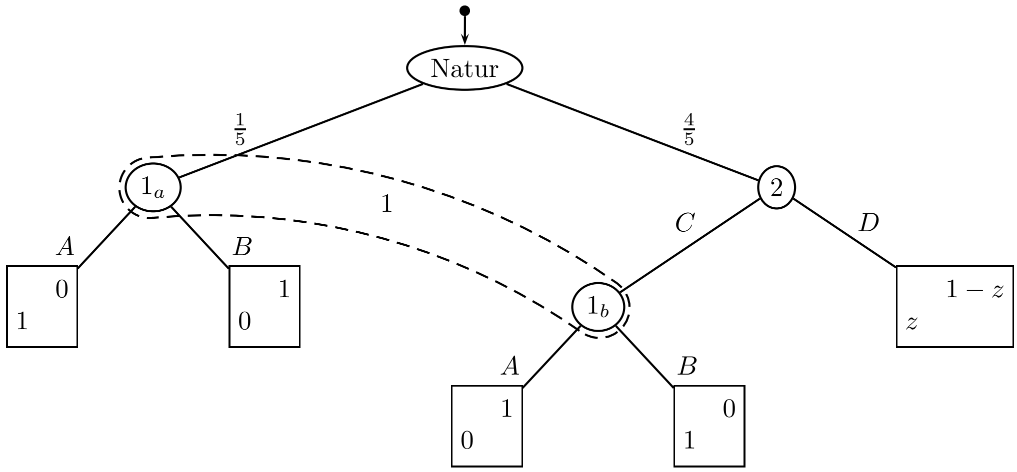
   Der Kuchen schrumpft mit einem Diskontfaktor $\delta < 1$. Nehmen Sie an, daß $\delta$ nahe bei 1 liegt.

   (a) Welche der obigen drei Aufteilungen können in einem teilspielperfekten Gleichgewicht in reinen Strategien resultieren in welchem sich die Spieler sofort einigen (sofort heißt, daß in der ersten Periode Spieler 1 einen Vorschlag macht und Spieler 2 ihn annimmt).

   Geben Sie für jede dieser Auszahlungen ein Beispiel für ein teilspielperfektes Gleichgewicht, das sofort zu dieser Auszahlung führt.

   (b) Finden Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem **keine** Einigung in der ersten Periode erfolgt!

3. Aufgabe




Betrachten Sie das obige Spiel: Es beginnt mit einem Zufallszug, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ wird nach links gezogen, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ nach rechts. Links kommt Spieler 1 zum Zug, rechts Spieler 2. Zieht Spieler 2 nach links ($C$), kommt Spieler 1 zum Zug, zieht Spieler 2 nach rechts ($D$), endet das Spiel. Alle Züge von Spieler 1 beenden das Spiel. Wenn Spieler 1 zum Zug kommt, weiß er nicht, ob er sich in Knoten $1_a$ oder $1_b$ befindet (die gestrichelte Linie bezeichnet einen Informationsbezirk für Spieler 1). Die Auszahlungen stehen links unten für Spieler 1 und rechts oben für Spieler 2.

(a) Wieviele und welche Teilspiele besitzt das Spiel? Geben Sie für jedes Teilspiel an, welche der Knoten Natur, $1_a$, $1_b$ und 2 das Teilspiel enthält.

(b) Zählen Sie alle reinen Strategien von Spieler 1 auf.

(c) Welches der Gleichgewichtskonzepte, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben, ist zur Lösung dieses Spiels angemessen. Worauf müssen Sie achten? Begründen Sie Ihre Antwort. Verwenden Sie im folgenden dieses Konzept.

(d) Setzen Sie $z = -100$. Bestimmen Sie alle Gleichgewichte.

Wenn Spieler 1 zum Zug kommt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er dann in Knoten $1_a$ und mit welcher Wahrscheinlichkeit in Knoten $1_b$?

(e) Setzen Sie $z = +100$. Bestimmen Sie wieder alle Gleichgewichte.

Wenn Spieler 1 zum Zug kommt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er jetzt in Knoten $1_a$ und mit welcher Wahrscheinlichkeit in Knoten $1_b$?

(f) Nehmen Sie jetzt an, daß Spieler 2 eine gemischte Strategie $(\beta, 1-\beta)$ spielt. Er zieht mit Wahrscheinlichkeit $\beta$ nach links ($C$), und mit Wahrscheinlichkeit $1-\beta$ nach rechts ($D$). Spieler 1 kennt $\beta$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Spieler 1, wenn er denn zum Zug kommt, in Knoten $1_a$ bzw. in Knoten $1_b$?

(g) Was ist, gegeben diese Wahrscheinlichkeit, die beste Antwort von Spieler 1 auf eine gegebene gemischte Strategie $(\beta, 1-\beta)$ von Spieler 2?

(h) Nun nehmen Sie an, daß $z = \frac{1}{2}$ ist und Spieler 1 die gemischte Strategie $(\alpha, 1-\alpha)$ spielt. Er zieht mit Wahrscheinlichkeit $\alpha$ nach links ($A$), und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ nach rechts ($B$). Spieler 2 kennt $\alpha$.

Was ist in diesem Fall die beste Antwort von Spieler 2?

(i) Bestimmen Sie für $z = \frac{1}{2}$ die Gleichgewichtsstrategien von Spieler 1 und Spieler 2?

Wie groß sind die Erwartungsauszahlungen der Spieler?