

Ihre Version ist . Bitte vergessen Sie nicht, die Version in den Lösungsbogen zu übertragen. Lösen Sie die Aufgaben zunächst hier (und ggf. auf dem Schmierpapier) und übertragen Sie die Lösungen zum Schluss in den Lösungsbogen. Geben Sie den Lösungsbogen ab, und behalten Sie dieses Aufgabenblatt. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Es gibt unterschiedliche Versionen — Sie finden die richtigen Antworten jeweils unter verschiedenen Buchstaben (a,b,c,d,e), die Antworten sind aber in allen Versionen die gleichen.

Aufgabe: Die Varianz von X sei 2. Was ist die Varianz von $3X_2 - 2X_2 - 2X_3 + 2X_4$? (7 Punkte)

1: Übertragen Sie die Lösung in Feld 1 des Lösungsbogens. 18

Anstatt hier kompliziert Kovarianzen zu berücksichtigen, ist es leichter, den Ausdruck $3X_2 - 2X_2 - 2X_3 + 2X_4$ zunächst zu $X_2 - 2X_3 + 2X_4$ zu vereinfachen. Dann ist die Varianz $(1 + 4 + 4) \cdot 2 = 18$

Aufgabe: Das Gewicht von Widgets ist gleichverteilt (rechteckverteilt) mit unbekannter Standardabweichung. Eine Stichprobe von 25 Widgets ergibt ein mittleres Gewicht von 50 und eine Standardabweichung von 20. Was ist die Standardabweichung des Mittelwertes, $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$? (7 Punkte)

2: Übertragen Sie die Lösung in Feld 2 des Lösungsbogens. 4

$\sigma_x / \sqrt{n} = 20/5$

Aufgabe: Gehen Sie nun davon aus, dass die geschätzte Standardabweichung des Mittelwertes 1 ist. Alle anderen Angaben sind wie in der obigen Aufgabe. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellen im beiliegenden Informationsblatt die Obergrenze des 90% Konfidenzintervalls für den Mittelwert. Falls Sie im Informationsblatt keine exakt passende Verteilung finden, gehen Sie davon aus, dass die Stichprobe hinreichend groß ist, um eine Approximation verwenden zu können. (9 Punkte)

3: Übertragen Sie die Lösung in Feld 3 des Lösungsbogens. 51.64

$50 + 1 \cdot Q_N(0.95) = 50 + 1 \cdot 1.64$

Aufgabe: Die Verteilung Q hängt von einem Parameter θ ab. Das erste Moment dieser Verteilung ist $\mu_1 = 3 - \theta/2$. Unsere Stichprobe enthält drei Beobachtungen: $-1, 0, 1$. Was ist der Momentenschätzer auf Basis des ersten Moments für θ ? (6 Punkte)

4: Übertragen Sie die Lösung in Feld 4 des Lösungsbogens. 6

$m_1 = 0, 0 = 3 - \theta/2, \theta = 6$

Aufgabe: Die Zufallsvariable X ist normalverteilt. Unsere Stichprobe enthält drei Beobachtungen: 10, 20, und 30. Geben Sie den unverzerrten Schätzer für die Varianz von X an. (2 Punkte)

5: Übertragen Sie die Lösung in Feld 5 des Lösungsbogens. 100

Aufgabe: X ist entsprechend der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion verteilt:

$$P(X = x|\theta) = \begin{cases} 1/4 & \text{falls } x = \theta - 4 \\ 1/2 & \text{falls } x = \theta - 2 \\ 1/4 & \text{falls } x = \theta \end{cases}$$

Was ist der ML-Schätzer für θ , wenn die Stichprobe die drei Beobachtungen: 5, 5, 7 enthält? (9 Punkte)

6: Übertragen Sie die Lösung in Feld 6 des Lösungsbogens. 7

$\theta = 7 : LL = 1/16, \theta = 9 : L = 1/32.$

Aufgabe: Ihre Stichprobe enthält 7 unabhängige und identisch verteilte Beobachtungen: X_1, \dots, X_7 . Welche Schätzfunktionen für $E(X)$ sind erwartungstreu? (mehrere Antworten möglich, 5 Punkte)

7a: $(X_2 + X_3)/2$

7b: $2X_2 - X_3 + X_4$

7c: $2X_2 - 3X_2 + X_4$

7d: $(2X_2 - X_3 + X_4)/2$

7e: X_4

Aufgabe: Die Länge von Widgets ist normalverteilt mit bekannter Standardabweichung. Eine Stichprobe von 25 Widgets ergibt eine mittleres Länge von 250 und eine Standardabweichung von 25. Wie bestimmen Sie die Obergrenze des 99% Konfidenzintervalls für den Mittelwert? (mehrere Antworten möglich, 5 Punkte)

8a: $250+5*qt(0.005,df=24)$

8b: $250-5*qnorm(0.005)$

8c: $250+5*qt(0.99,df=24)$

8d: $250-25*qt(0.005,df=24)$

8e: $250-25*qnorm(0.005)$

*Die Standardabweichung von \bar{X} ist $25/\sqrt{n} = 25/5 = 5$. Bei einem 99% Intervall bleiben links und rechts 0.005 übrig. Da $qt(0.005)$ negativ ist, erhält man mit $250-5*qnorm(0.005)$ die Obergrenze.*

Aufgabe: X ist normalverteilt mit Mittelwert 70 und Varianz 100. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Mittelwert einer Stichprobe von 25 Einheiten größer als 71 ist? (mehrere Antworten möglich, 5 Punkte)

9a: $1-pt(1/4,df=24)$

9b: $1-pnorm(1/2)$

9c: $pnorm(1/2)$

9d: $pt(2,df=24)$

9e: $pnorm(2)$

$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{100/\sqrt{25}} = 10/5 = 2; (71 - 70)/\sigma_{\bar{X}} = 1/2$

Aufgabe: Sie untersuchen den Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen, X und Y . Das Merkmal X kann die beiden Werte 1 und 2 annehmen, Y hat entweder den Wert A oder B . Die Häufigkeit der Merkmale ist durch die folgende Tabelle gegeben:

	$Y = A$	$Y = B$
$X = 1$	22	13
$X = 2$	18	16

Ihr Signifikanzniveau ist 5%. Interpretieren Sie das folgende Testergebnis:

Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
 $\chi^2 = 0.3485, df = 1, p\text{-value} = 0.555$

(mehrere Antworten möglich, 10 Punkte)

- 10a:** Zwischen den beiden Merkmalen X und Y gibt es einen signifikanten Zusammenhang.
- 10b:** Die Nullhypothese, X und Y seien voneinander abhängig, kann man zum gegebenen Signifikanzniveau verwerfen.
- 10c:** Die Nullhypothese, X und Y seien unabhängig, kann man nicht zum gegebenen Signifikanzniveau verwerfen.
- 10d:** Um zu testen, ob X und Y voneinander unabhängig sind, sollte man besser den Korrelationskoeffizienten betrachten.
- 10e:** Die Nullhypothese, X und Y seien unabhängig, kann man zum gegebenen Signifikanzniveau verwerfen.

Aufgabe: Ihr Signifikanzniveau ist 5%. Interpretieren Sie das folgende Testergebnis:

Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data: x1 and x2

W = 4182, p-value = 0.04577

alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0

(mehrere Antworten möglich, 10 Punkte)

- 11a:** Es wurde ein einseitiger Test durchgeführt.
- 11b:** Die Nullhypothese kann bei einem Signifikanzniveau von 5% abgelehnt werden.
- 11c:** x_1 und x_2 sind nicht signifikant verschieden.
- 11d:** Es wurde ein zweiseitiger Test durchgeführt.
- 11e:** Dieser Test gibt nur dann ein sinnvolles Ergebnis, wenn x_1 und x_2 nicht normalverteilt sind.

Aufgabe: Das Gewicht von Widgets ist normalverteilt mit unbekannter Varianz. Ihre Nullhypothese ist, das mittlere Gewicht sei kleiner oder gleich 5. Ihre Alternativhypothese ist, das mittlere Gewicht sei größer als 12. In Ihrer Stichprobe von 5 Beobachtungen messen Sie einen Mittelwert von \bar{x} . Für \bar{x} schätzen Sie eine Standardabweichung von $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$. Ihr Signifikanzniveau ist 5%. Sie berechnen eine Teststatistik

$$g = \frac{\bar{x} - 5}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellen im beiliegenden Informationsblatt die Obergrenze des Annahmebereichs für g . (7 Punkte)

12:	a	b	c	d	e
anderer Wert	2.78	1.64	2.02	2.13	

$Q_t(0.95, 4)$

Aufgabe: In einem linear-log Modell wird Y als abhängig von X und C erklärt:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X + \beta_2 \ln C + u$$

(6 Punkte)

- 13a:** β_1 gibt die Elastizität von Y auf X an
- 13b:** β_1 gibt an, um wieviel Prozent sich Y ändert, wenn X um 0.01 wächst
- 13c:** $1/\beta_1$ gibt an, um welchen Betrag sich Y ändert, wenn X um 1% wächst
- 13d:** $\beta_1/100$ gibt an, um welchen Betrag sich Y ändert, wenn X um 1% wächst
- 13e:** keine der Antworten ist richtig

Aufgabe: Die Variable Y hängt von den beiden binären Variablen A und B ab. Sie beobachten folgende Mittelwerte für Y für unterschiedliche Kombinationen von A und B :

	B	kein B
A	3	5
kein A	7	11

Mit den gleichen Daten schätzen Sie auch eine lineare Regression:

$$Y = \beta_0 + \beta_A d_A + \beta_B d_B + \beta_{AB} d_A d_B + u$$

Dabei sind d_A und d_B jeweils Dummyvariablen, die 1 sind, wenn A bzw. B eintritt und 0 sonst.

Welchen Wert schätzen Sie für β_B ? (5 Punkte)

14:

a	b	c	d	e
anderer Wert	-6	2	11	4

$5 - 11 = -4$

Aufgabe: Welchen Wert schätzen Sie für β_{AB} ?

(5 Punkte)

15:

a	b	c	d	e
anderer Wert	2	11	-4	-6

$3 + 11 - 7 - 5 = 2$

Aufgabe: Sie schätzen den Zusammenhang $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_1 \cdot X_2 + u$ und erhalten das folgende Ergebnis:

Call: `lm(formula = Y ~ X1 * X2)`

Coefficients: Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept)	-5	5	-1	0.187
X1	-1	1	-1	0.187
X2	6	2	3	0.020 *
X1:X2	-3	1	-3	0.020 *

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 30.89 on 78 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.4331, Adjusted R-squared: 0.4113

F-statistic: 19.87 on 3 and 78 DF, p-value: 1.157e-09

Aufgabe: Was ist der Erwartungswert von Y , wenn $X_1 = 2$ und $X_2 = 1$ ist? (4 Punkte)

16:

a	b	c	d	e
anderer Wert	1	-6	-1	0

$-5 + 2 \cdot (-1) + 6 + 2 \cdot (-3) = -7$

Was ist der marginale Effekt von X_2 , wenn $X_1 = 0$ ist?

(2 Punkte)

17:

a	b	c	d	e
anderer Wert	0	2	3	6

Aufgabe: Verwenden Sie ein Signifikanzniveau von 5%. (mehrere Antworten möglich, 10 Punkte)

- 18a:** Die Hypothese, die Interaktion zwischen X_1 und X_2 sei Null, wird abgelehnt.
- 18b:** 43.31% der Varianz von Y werden durch das Modell erklärt.
- 18c:** Der marginale Effekt von X_1 ist signifikant abhängig von X_2 .
- 18d:** Die Hypothese $\beta_2 = 0$ wird abgelehnt.
- 18e:** 19.87% der Varianz von Y werden durch das Modell erklärt.

Aufgabe: Ihre Nullhypothese ist nun, dass $\beta_3 = 1$. Wie groß ist der Absolutbetrag Ihrer Teststatistik?

(5 Punkte)

19:

a	anderer Wert	b	3	c	4	d	1	e	2
---	--------------	---	---	---	---	---	---	---	---

$(1 - (-3))/1 = 4$

maximal erreichbare Punktzahl: 119

davon durch Randomisieren erreichbar: 30

hinreichend: 62