Explain all your answers in a clear, concise and legible way. Make clear which of your answers belongs to which question. Make also clear what is an answer and what is only an intermediate result. If you can not find an answer for some of the questions in the given time, explain clearly and briefly how you would proceed if you had more time. If you come to the conclusion that in a given case an equilibrium does not exist, explain why it does not exist. Write clearly and legibly!

Begründen Sie Ihre Antworten klar, knapp und lesbar. Machen Sie klar, welche Antworten zu welcher Frage gehören. Machen Sie auch klar, was ein Zwischenergebnis und was eine Antwort ist. Wenn Sie für einige Fragen in der gegebenen Zeit keine Antwort finden, erklären Sie klar und deutlich, wie man weiter vorgehen sollte. Wenn Sie zu dem Ergebnis kommen, dass es für einen gegebenen Fall kein Gleichgewicht gibt, erkären Sie, warum es keines gibt. Schreiben Sie klar und leserlich!

1. Consider a two player bargaining problem $\langle S, d\rangle$ where S and d have the usual interpretation (S is a set of pairs of utilities associated with possible outcomes of the bargaining process and d is the disagreement point). Be F^E the so called 'egalitarian solution', i.e. the element $x \in S$ that maximises $x_i - d_i$ under the restriction $x_1 - d_1 = x_2 - d_2$.
   (a) Under the usual assumptions on S and d, does a solution F^E always exist? Is it always unique? If not, give a counterexample, if yes, give a brief proof. If the proof is obvious, explain why!
   (b) Which axioms that we discussed in the context of Nash's bargaining solution are fulfilled by F^E, and which are not? Give a counterexample for each axiom that is not fulfilled and give a brief proof for each axiom that is fulfilled. If the proof is obvious, explain why!

(1) Betrachten Sie ein Verhandlungsproblem für zwei Spieler $\langle S, d\rangle$ in dem S und d die übliche Bedeutung haben (S ist eine Menge von Nutzenpaaren die mit möglichen Verhandlungsergebnissen assoziiert sind, und d ist der „disagreement point"). Sei F^E die „egalitäre Lösung", d.h. das Element $x \in S$ das $x_i - d_i$ maximiert unter der Nebenbedingung $x_1 - d_1 = x_2 - d_2$.

(1a) Existiert unter den üblichen Annahmen an S und d stets eine Lösung F^E? Ist sie immer eindeutig? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel, falls doch, geben Sie einen kurzen Beweis an. Wenn der Beweis offensichtlich ist, erklären Sie warum!

(1b) Welche Axiome die wir im Zusammenhang mit der Nash Verhandlungslösung diskutiert haben, werden durch F^E erfüllt, und welche nicht? Geben Sie für jedes Axiom das nicht erfüllt ist ein Gegenbeispiel, und für jedes erfüllte Axiom einen kurzen Beweis an. Wenn der Beweis offensichtlich ist, erklären Sie warum!

2. Be $\langle S, d\rangle$ a two player bargaining problem, f^N the Nash bargaining solution and $u(x)$ a utility transformation for player 1. To describe risk aversion we assume that u is monotonically increasing and concave. The bargaining problem $\langle S', d'\rangle$ is obtained by tranforming utilities of player 1 in $\langle S, d\rangle$ according to u, i.e. $S' = \{(u(x_1), x_2)|(x_1, x_2) \in S\}$ and $d' = (u(d_1), d_2)$. Compare the transformation of the Nash bargaining solution of the original problem $\langle S, d\rangle$ with the Nash bargaining solution of the transformed problem $\langle S', d'\rangle$. Explain!

(2) Sei $\langle S, d\rangle$ ein Verhandlungsproblem für zwei Spieler, f^N die Nash Verhandlungslösung, und $u(x)$ eine Nutzentransformation für Spieler 1. Um Risikoaversion zu beschreiben nehmen wir an, dass u monoton steigend und konkav ist. Das Verhandlungsproblem $\langle S', d'\rangle$ erhält man durch Transformation der Nutzen von Spieler 1 in $\langle S, d\rangle$ gemäß u, d.h. $S' = \{(u(x_1), x_2)|(x_1, x_2) \in S\}$ und $d' = (u(d_1), d_2)$. Vergleichen Sie die Transformation der Nash Verhandlungslösung des ursprünglichen Problems $\langle S, d\rangle$ mit der Nash Verhandlungslösung des transformierten Problems $\langle S', d'\rangle$. Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Consider the following pair of strategies in a game of alternating offers with a constant discount factor δ. The share of player 1 is called x_1, the share of player 2 is called x_2.

(3) Betrachten Sie das folgende Paar von Strategien in einem Spiel mit wechselnden Angeboten und einem konstanten Diskontfaktor δ. Wir bezeichnen mit x_1 den Anteil von Spieler 1 und mit x_2 den Anteil von Spieler 2.

	A	B
1 proposes	$(x^*, 1 - x^*)$	$(1, 0)$
1 accepts	$x_1 \geq x^*$	$x_1 = 1$
2 proposes	$(x^*, 1 - x^*)$	$(1, 0)$
2 accepts	$x_2 \geq 1 - x^*$	$x_2 \geq 0$
transitions	go to B if a proposal was rejected	

(a) For which values of x^* is this a Nash equilibrium?
(b) For which values of x^* is this a subgame-perfect equilibrium?

4. Consider a two-player bargaining game with alternating offers over a pie that has value 1 and both bargainers have a fixed cost of delay. If no agreement is reached player 1 faces a cost c_1 and player 2 faces a cost c_2 so that the player i's payoff if agreement is reached in period t and if player i's share of the pie is x_i is given as $u_i(x_i, t) = x - t \cdot c_i$.

   (a) What can you say about the subgame perfect equilibria of this game?
   (b) In case 4a the accumulated waiting cost could be larger than the value of the pie if the agreement was reached very late. Assume now that the player's accumulated waiting cost is limited and can not be larger than the value of the pie so that the player i's payoff in period t, if the player's share of the pie is x_i, is given as $u_i(x_i, t) = \max\{0, x - t \cdot c_i\}$. What can you say about the subgame perfect equilibria of this game?

5. Two players interact for T periods. In each period one of them makes an offer s how to divide the joint profit they could make in each period. In the first period player 1 makes an offer, if player 2 does not accept, player 2 makes an offer in period 2, if player 1 does not accept, player 1 makes an offer in period 3 etc.. When players do not accept they make no profit in this period. As soon as one player accepts, they stop making offers and start making a profit of 1 in each remaining period, and player 1 gets a share of s and player 2 gets a share if $1 - s$ in each of the remaining periods until period T where the game ends.

   (a) What is the subgame-perfect equibrium of this game if $T = 1$?
   (b) What is the subgame-perfect equibrium of this game if $T = 2$?
   (c) What is the subgame-perfect equibrium of this game in the limit if $T \to \infty$?
   (d) What can you say about Nash-equilibria in this game if $T = 1$.
   (e) What can you say about Nash-equilibria in this game in the limit if $T \to \infty$.
   (f) Now assume that players discount their payoff with a factor δ which is common for both players. What is now a subgame perfect equilibrium for a given T? What, if $T \to \infty$?

(3a) Für welche Werte von x^* ist das ein Nash Gleichgewicht?

(3b) Für welche Werte von x^* ist das ein teilspielperfektes Gleichgewicht?

(4) Betrachten Sie ein Verhandlungsspiel mit abwechselnden Angeboten für zwei Spieler über einen Kuchen der Größe 1 wenn beide Verhandlungspartner fixe Wartekosten haben. Wenn keine Einigung erziehlt wird, hat Spieler 1 Kosten von c_1 und Spieler 2 hat Kosten von c_2. Mithin, wenn Einigung in Periode t erziehlt wird, und der Anteil von Spieler i am Kuchen x_i ist, dann ist die Auszahlung von Spieler i gegeben durch $u_i(x_i, t) = x - t \cdot c_i$.

(4a) Was können Sie über die teilspielperfekten Gleichgewichte dieses Spiels sagen?

(4b) Im Fall 4a können die akkumulierten Wartekosten größer sein, als der Wert des Kuchens falls die Einigung sehr spät erzielt wird. Nehmen Sie nun an, dass die akkumulierten Wartekosten der Spieler begrenzt sind und nicht größer als der Wert des Kuchens werden können, so dass die Auszahlung von Spieler i in Periode t, falls der Anteil von Spieler i am Kuchen x_i beträgt, durch $u_i(x_i, t) = \max\{0, x - t \cdot c_i\}$ gegeben ist. Was können Sie über die teilspielperfekten Gleichgewichte dieses Spiels sagen?

(5) Zwei Spieler sind für T Perioden in Interaktion. In jeder Periode macht einer von beiden ein Angebot s wie der gemeinsame Gewinn, den die beiden in jeder Periode machen könnten, aufgeteilt wird. In der ersten Periode macht Spieler 1 ein Angebot, wenn Spieler 2 nicht zustimmt, macht Spieler 2 ein Angebot in Periode 2, wenn Spieler 1 nicht zustimmt, macht Spieler 1 ein Angebot in Periode 3, etc.. Wenn ein Spieler nicht zustimmt, wird in dieser Periode kein Gewinn gemacht. Sobald ein Spieler zustimmt, hören Sie damit auf, Angebote zu machen, und machen fortan einen Gewinn von 1 in jeder verbleibenden Periode. Spieler 1 bekommt einen Anteil von s und Spieler 2 erhält einen Anteil der Höhe von $1 - s$ in jeder der verbleibenden Perioden bis zur Periode T in der das Spiel aufhört.

(5a) Was ist das teilspielperfektes Gleichgewicht dieses Spiels wenn $T = 1$?

(5b) Was ist das teilspielperfektes Gleichgewicht dieses Spiels wenn $T = 2$?

(5c) Was ist das teilspielperfektes Gleichgewicht dieses Spiels wenn $T \to \infty$?

(5d) Was kann man über die Nash Gleichgewichte dieses Spiels sagen wenn $T = 1$?

(5e) Was kann man über die Nash Gleichgewichte dieses Spiels sagen wenn $T \to \infty$?

(5f) Nehmen Sie nun an, dass Spieler Ihre Auszahlung mit einem Faktor δ, der für beide gleich ist, abdiskontinieren. Was ist nun ein teilspielperfektes Gleichgewicht für ein gegebenes T? Was ist, wenn $T \to \infty$?