seit 1558

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Lehrstuhl für Empirische und Experimentelle Wirtschaftsforschung
Prof. Oliver Kirchkamp

Klausuren in BW 24.2/Spieltheorie

Inhaltsverzeichnis

1 12. Juli 2010

Bitte begründen Sie alle Ihre Antworten. Bearbeiten Sie die Klausur bitte in einer Stunde und ohne Hilfsmittel. Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie folgendes Zweipersonenspiel (die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler 2 jeweils oben rechts angegeben):

		Spieler 2	
		c	d
Spieler 1	A	8 8	3 4
	B	9 5	9 8

   (a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien (mit Begründung).

   (b) Prüfen Sie, ob eines der Gleichgewichte Pareto-effizient ist (mit Begründung).

   (c) Prüfen Sie nun, ob eines der Gleichgewichte das andere risiko-dominiert (mit Begründung).

   (d) Erstellen Sie nun ein Spiel in Normalform mit zwei Spielern, die jeweils zwei Strategien haben. Dieses Spiel soll zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien haben, von denen keines Pareto-effizient ist (mit Begründung).

---

2. Betrachten Sie folgendes Zweipersonenspiel (die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler 2 jeweils oben rechts angegeben):

Spieler 2

		f	*g*	*h*	*i*	*j*
	A	1/2 0	1 1/2	2 0	2 −1/2	1 −1
	B	1/2 2	0 1	0 1	1 0	−1/2 1/2
Spieler 1	*C*	1 0	1/2 1/2	2 −1/2	2 −1	0 0
	D	1 1/2	−1/2 1	1 −1/2	1/2 0	1/2 2
	E	1/2 2	−1 2	1/2 0	2 1/2	0 1

(a) Gibt es strikt dominierte Strategien? Geben Sie diese mit Begründung an.

(b) Vereinfachen Sie das Spiel durch iteratives Eliminieren strikt dominierter Strategien. Geben Sie die Strategien mit Begründung an.

(c) Betrachten Sie nun das vereinfachte Spiel und bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen und gemischten Strategien (mit Begründung).

(d) Prüfen Sie nun, ob das Gleichgewicht/die Gleichgewichte, die Sie im vereinfachten Spiel gefunden haben, evolutionär stabil sind.

---

3. Betrachten Sie das folgende Spiel (die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler 2 jeweils oben rechts angegeben).

Spieler 2

		c	*d*
Spieler 1	*A*	−1 −4	0 −10
	B	−10 0	−6 −9

(a) Beschreiben Sie das Spiel in extensiver Form und beschreiben Sie ein Gleichgewicht.

(b) Um welche Art von Spiel oder Situation handelt es sich?

(c) Gehen Sie nun davon aus, dass die Spieler vor dem Spiel einen bindenden Vertrag über ihre jeweiligen Strategien schließen können. Bestimmen Sie die Nash-Verhandlungslösung.

(d) Auf Basis welcher weiterer Mechanismen könnte Kooperation hier zustande kommen?

---

4. Anna möchte ihr 4 Jahre altes Auto verkaufen. Annas Werkstatt stellt fest, dass das Auto in gutem Zustand ist und beziffert den tatsächlichen Wert auf 10000 Euro. Auf dem Rückweg von der Werkstatt trifft sie Maria, die am Kauf des Wagens interessiert ist. Sie bittet Maria, doch später anzurufen, um zu sagen wieviel sie für das Auto bezahlen würde. Anna entscheidet dann, ob sie das Gebot annimmt oder ablehnt. Maria informiert sich und liest in der Zeitschrift „Fahrzeugtest“, dass von dieser Art Wagen nach 4 Jahren nur noch etwa 40% in gutem Zustand sind (Wert Euro 10000), 60% aber in schlechtem Zustand (Wert Euro 5000). Zudem erfährt sie, dass die Wertschätzung eines Verkäufers eines Gebrauchtwagens nur 50% des tatsächlichen Werts des Autos beträgt.

(a) Beschreiben Sie die Abfolge der Züge in diesem Spiel. Ermitteln Sie die Auszahlungen der Spieler.

(b) Stellen Sie das Spiel in extensiver Form dar. Skizzieren Sie dabei die (potentiell unendlich vielen) Angebote von Maria nur beispielhaft, ähnlich wie wir das z.B. in der Vorlesung im Stackelbergspiel gemacht haben. Kennzeichnen Sie die Informationsbezirke.

(c) Bestimmen Sie das Gleichgewicht dieses Spiels. Erläutern Sie.

2 23. Februar 2010

Bitte begründen Sie alle Ihre Antworten. Bearbeiten Sie die Klausur bitte in einer Stunde und ohne Hilfsmittel. Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie das folgende kooperative Spiel $\mathcal{G}$ mit drei Spielern, A, B, und C. Es gilt $v(A) = 100$, $v(B) = 50$, $v(C) = 0$, $v(A,B) = 270$, $v(A,C) = 220$, $v(B,C) = 170$, $v(A,B,C) = 350$ wobei $v(K)$ jeweils den Wert einer Koalition K bezeichnet.

   (a) Überführen Sie dieses Spiel in ein 0-1-normalisiertes 3 Personen Spiel $\mathcal{G}_{0-1}$.

   (b) Stellen Sie die Menge der dominierten Imputationen graphisch dar. Geben Sie in Ihrer Zeichnung (oder in Ihren Zeichnungen) klar an, welche Menge zu welcher Koalition gehört.

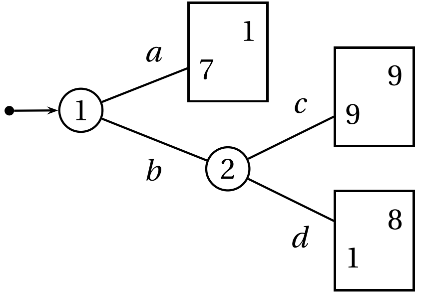
   (c) Falls der Kern des Spiels $\mathcal{G}_{0-1}$ nicht leer ist, geben Sie eine Allokation im Kern des 0-1-normalisieren Spiels an.

   (d) Gibt es eine Allokation im Kern des ursprünglichen Spiels, bei der A einen Betrag von 160 erhält? Begründen Sie kurz.

   (e) Gibt es eine Allokation im Kern des ursprünglichen Spiels, bei der A einen Betrag von 200 erhält? Begründen Sie kurz.

---

2. Betrachten Sie folgendes Spiel in extensiver Form:



   (a) Wieviele Teilspiele hat das Spiel (zählen Sie das Spiel selbst mit)?

   (b) Wieviele Strategien hat Spieler 1? Wieviele hat Spieler 2?

   (c) Transformieren Sie das Spiel in Normalform.

   (d) Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte des Spiels.

   (e) Welche davon sind nicht teilspielperfekt?

---

3. Ein Entscheider mit von Neumann-Morgenstern Präferenzen hat Präferenzen $\mathscr{A} \succ \mathscr{B} \succ \mathscr{C}$ über die Allokationen $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, und $\mathscr{C}$.

   Sei $\mathscr{X}$ eine Lotterie, die ihm mit Wahrscheinlichkeit 1/2 die Allokation $\mathscr{A}$ und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 die Allokation $\mathscr{C}$ gibt. Unser Entscheider hat Präferenzen $\mathscr{X} \succ \mathscr{B}$.

   Sei $\mathscr{Y}$ eine Lotterie, bei der er mit Wahrscheinlichkeit 1/4 die Allokation $\mathscr{A}$ und mit Wahrscheinlichkeit 3/4 die Allokation $\mathscr{C}$ erhält, und sei $\mathscr{Z}$ eine Lotterie, bei der er mit Wahrscheinlichkeit 1/2 die Allokation $\mathscr{B}$ und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 die Allokation $\mathscr{C}$ erhält. Können Sie sagen, was dieser Entscheider wählen wird, wenn er sich zwischen $\mathscr{Y}$ und $\mathscr{Z}$ entscheiden muss. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

---

4. Betrachten Sie folgendes Spiel in Normalform:

Maria

		a	b
Eva	a	0 0	1 2
	b	2 1	3 3

   (a) Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte des Spiels.

   (b) Was ist die Minimax Auszahlung von Eva?

   (c) Stellen Sie den Stabilitätsbereich graphisch dar.

   (d) Betrachten Sie folgende Strategie $\mathscr{S}$ für das wiederholte Spiel (das Spiel beginnt in Periode 1): Spiele in geraden Perioden immer a und in ungeraden Perioden immer b, es sei denn, in der Vergangenheit ist einmal ab oder ba gespielt worden (wir nennen das eine Abweichung). In diesem Fall wähle fortan immer die Aktion, die bei der ersten Abweichung dieser Art gespielt wurde.

   Die Auszahlung des wiederholten Spiels sei der Grenzwert des Mittelwerts der Auszahlungen der Stufenspiele. Ist es ein Nash-Gleichgewicht, falls Eva und Maria beide die Strategie $\mathscr{S}$ benutzen. Begründen Sie kurz.

   (e) Nun sei die Auszahlung des wiederholten Spiels die mit dem Faktor δ abdiskontierten Auszahlungen der Stufenspiele. Für welche Werte von δ ist die obige Strategiekombination ein Nash-Gleichgewicht? Begründen Sie kurz.

   (f) Gehen Sie nun wieder davon aus, dass die Auszahlung des wiederholten Spiels der Grenzwert des Mittelwerts der Auszahlungen der Stufenspiele ist. Ist die obige Strategiekombination ein teilspielperfektes Gleichgewicht? Begründen Sie kurz.

3 23. Februar 2009

Bitte begründen Sie alle Ihre Antworten. Bearbeiten Sie die Klausur bitte in einer Stunde und ohne Hilfsmittel. Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie folgendes Zweipersonenspiel (die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler 2 jeweils oben rechts angegeben):

Spieler 2

		f	g	h	i	j
Spieler 1	A	4 6	9 4	6 1	5 -1	0 7
	B	$\frac{3}{2}$ 0	6 6	$\frac{9}{2}$ 0	12 0	9 5
	C	2 8	-1 9	3 $\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ 4
	D	$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$	0 12	$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	0 0	-1 6
	E	2 4	0 $\frac{9}{2}$	3 3	$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$ 0

   (a) Gibt es strikt dominierte Strategien? Geben Sie diese mit Begründung an.

   (b) Gibt es iterativ strikt dominierte Strategien? Geben Sie diese mit Begründung an.

   (c) Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte (mit Begründung).

---

2. Betrachten Sie folgendes Zweipersonenspiel (die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler 2 jeweils oben rechts angegeben):

Spieler 2

		a	b	c
Spieler 1	A	6 6	$\frac{9}{2}$ 0	12 0
	B	0 12	$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	0 0
	C	0 $\frac{9}{2}$	3 3	$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

   (a) Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte (mit Begründung).

   (b) Was sind die minimax Auszahlungen der beiden Spieler?

   (c) Dieses Spiel wird nun unendlich oft wiederholt. Die Auszahlungen werden mit dem Diskontfaktor δ abdiskontiert. Nehmen Sie an, dass die Spieler die folgende Strategiekombination spielen:

   - Spieler 1 beginnt mit A und bleibt dabei, jedenfalls solange Spieler 2 a spielt. Tut Spieler 2 das einmal nicht, wird Spieler 1 fortan immer C spielen.
   - Spieler 2 beginnt mit a und bleibt dabei, jedenfalls solange Spieler 1 A spielt. Tut Spieler 1 das einmal nicht, wird Spieler 2 fortan immer b spielen.

   Für welche Werte von δ ist das ein Nash-Gleichgewicht?

   Zur Erinnerung: $\sum_{i=0}^{\infty} \delta^i = \frac{1}{1-\delta}$

---

3. Andreas und Bettina sind miteinander verabredet. Leider wissen Sie nicht mehr, ob Sie sich nun fürs Kino, das Konzert oder das Kabarett entschieden haben. Alle Veranstaltungen beginnen zur gleichen Zeit und es ist so spät, dass sich beide sofort entscheiden müssen, wohin sie jeweils gehen, ohne jedoch zu wissen, wofür die andere Person sich entscheidet.

   Für Andreas gilt

   - Konzert $\succ$ Kabarett $\succ$ Kino.

   Für Bettina hingegen gilt

   - Kino $\succ$ Kabarett $\succ$ Konzert.

   Der Nutzen für die jeweils meistpräferierte Option ist 3, für die zweitbeste Option 2 und für die am wenigsten präferierte Option 1.

   Falls sich die beiden treffen und den Abend gemeinsam verbringen, ist der Nutzen für jeden der beiden wie oben angegeben. Falls sich die beiden nicht treffen, ist der Nutzen für jeden der beiden jeweils 0.

(a) Stellen Sie das Spiel in Normalform dar.

(b) Finden Sie alle Gleichgewichte in reinen Strategien. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Finden Sie alle Gleichgewichte in gemischten Strategien. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Stellen Sie das Spiel in extensiver Form dar.

(e) Nehmen Sie nun an, dass Andreas einen gemeinsamen Freund trifft, der ihm verrät, dass Bettina vor dem Kabarett steht und dort auf ihn wartet. Stellen Sie das neue Spiel in extensiver Form und in Normalform dar (gehen Sie davon aus, dass Bettina keine Entscheidung mehr fällen muss).

(f) Bestimmen Sie nun alle Gleichgewichte des Spiels aus 3e in gemischten und reinen Strategien. Begründen Sie Ihre Antwort.

(g) Betrachten Sie wieder das ursprüngliche Spiel (Teilaufgabe 3a–3d). Allerdings kommen Bettina plötzlich Zweifel, ob sie in Teilaufgabe 3a–3d nicht die Vorlieben von Andreas mit denen von Christian verwechselt hat. Eigentlich weiß sie nur, dass Andreas entweder die Präferenzen

i. Konzert $\succ$ Kabarett $\succ$ Kino

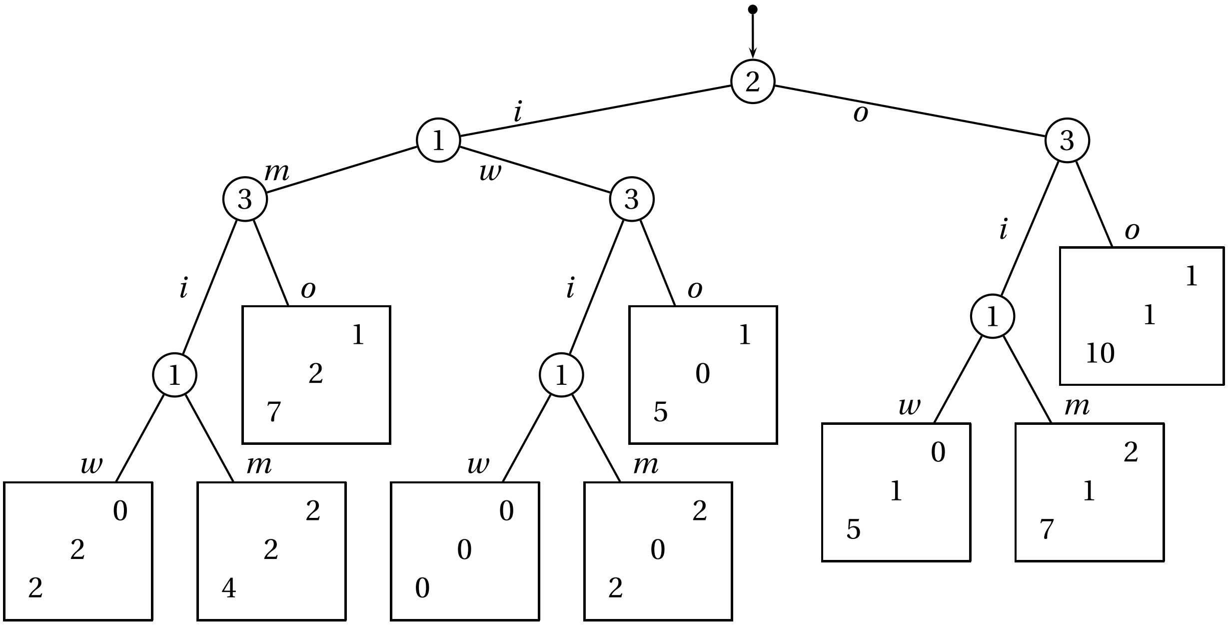
oder die Präferenzen

ii. Kino $\succ$ Konzert $\succ$ Kabarett

hat. Beides erscheint ihr genau gleich wahrscheinlich. Dadurch wird ihr Leben um einiges komplizierter. Allerdings erinnert sie sich wieder daran, dass sie beim Frühstück mit Andreas ausgemacht hat, auf keinen Fall ins Kabarett gehen zu wollen. Es verbleibt also beiden nur die Wahl zwischen Konzert und Kino. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen Informationsbezirken.

---

4. Betrachten Sie das folgende Spiel (die Auszahlungen von Spieler 1 sind links unten, die von Spieler 2 in der Mitte, und die von Spieler 3 oben rechts angegeben):



(a) Finden Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte.

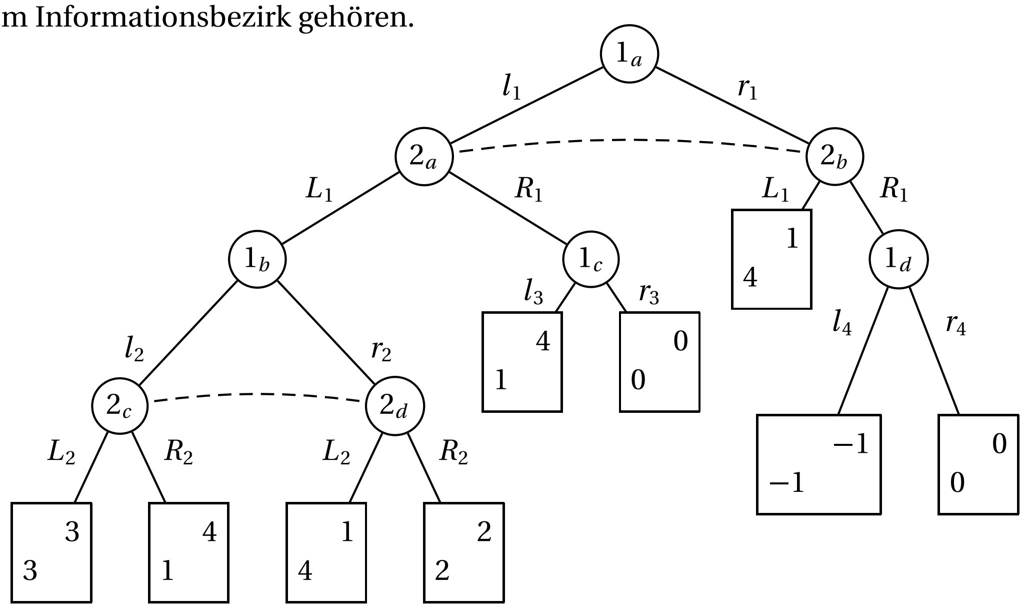
(b) Finden Sie mindestens ein Nash Gleichgewicht, welches nicht teilspielperfekt ist.

4 22. Juli 2008

Bitte begründen Sie alle Ihre Antworten. Bearbeiten Sie die Klausur bitte in einer Stunde und ohne Hilfsmittel.

Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie das folgende Spiel. Die Knoten an denen Spieler 1 zum Zuge kommt, sind mit 1_a, 1_b, 1_c und 1_d gekennzeichnet. Die Knoten an denen Spieler 2 zum Zuge kommt sind mit 2_a, 2_b, 2_c und 2_d gekennzeichnet. Die gestrichelten Linien kennzeichnen jeweils Knoten, die zu einem Informationsbezirk gehören.



(a) Wie viele reine Strategien hat Spieler 1? Wie viele reine Strategien hat Spieler 2?

(b) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen und gemischten Strategien und beschreiben Sie diese vollständig.

(c) Finden Sie ein Nash-Gleichgewicht, welches nicht teilspielperfekt ist.

---

2. Betrachten Sie folgendes Zweipersonenspiel (die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler 2 jeweils oben rechts angegeben):

		Spieler 2				
		f	*g*	*h*	*i*	*j*
Spieler 1	*A*	0 3	1 1	2 0	0 0	2 −1
	B	−2 4	2 2	4 1	3 1	0 0
	C	2 5	4 0	2 0	−2 0	3 −5
	D	−3 2	4 1	−1 −1	2 2	0 0
	E	−3 5	1 4	0 0	−4 7	0 1

(a) Können Sie strikt dominierte Strategien eliminieren? Geben Sie diese mit Begründung an.

(b) Können Sie wiederholt strikt dominierte Strategien eliminieren? Geben Sie diese mit Begründung an.

(c) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien (mit Begründung).

(d) Gibt es Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien? Falls ja, bestimmen Sie diese.

(e) Welches spieltheoretische Standard-Spiel stellt die Matrix nach der Eliminierung aller strikt dominierten und rekursiv strikt dominierten Strategien dar?

(f) Beschreiben Sie eine Situation, die durch dieses Spiel dargestellt wird.

3. Betrachten Sie folgendes Zweipersonenspiel (die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler 2 jeweils oben rechts angegeben):

Spieler 2

		d	e	f
Spieler 1	A	2 2	1 3	0 0
	B	3 0	5 5	7 x
	C	1 1	x 7	0 1

Sei $x = 0$

(a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien (mit Begründung).

(b) Was sind die minimax Auszahlungen der beiden Spieler?

(c) Stellen Sie den Stabilitätsbereich graphisch dar.

(d) Dieses Spiel wird nun unendlich oft wiederholt. Die Auszahlungen werden mit dem Diskontfaktor δ abdiskontiert.

Nehmen Sie nun an, dass die beiden Spieler die folgenden Strategien wählen: Am Anfang wählt Spieler 1 B, Spieler 2 spielt e. Dies tun Sie so lange, bis einer von beiden abweicht. Sobald einer von beiden abgewichen ist, spielt Spieler 1 A, Spieler 2 d.

Für welche Werte von δ ist das ein Nash-Gleichgewicht?

(e) Wir sind wieder im einperiodigen Spiel aus (a). Nun sei x beliebig. Geben Sie die Werte von x an, für die sich zwei weitere Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien ergeben.

---

4. Betrachten Sie das folgende kooperative Spiel $\mathcal{G}$ mit drei Spielern, A, B, und C. Es gilt

$$\begin{aligned} v(A) = v(B) &= v(C) = 0 \\ v(A,B) &= 800 \\ v(A,C) &= 600 \\ v(B,C) &= 0 \\ v(A,B,C) &= 800 \end{aligned}$$

wobei $v(K)$ jeweils den Wert einer Koalition K bezeichnet.

(a) Überführen Sie dieses Spiel in ein 0-1-normalisiertes 3 Personen Spiel $\mathcal{G}_{0-1}$.

(b) Stellen Sie die Menge der dominierten Imputationen graphisch dar. Geben Sie in Ihrer Zeichnung (oder in Ihren Zeichnungen) klar an, welche Menge zu welcher Koalition gehört.

(c) Falls der Kern des Spiels $\mathcal{G}_{0-1}$ nicht leer ist, geben Sie eine Allokation im Kern des 0-1-normalisieren Spiels an.

(d) Falls der Kern des Spiels $\mathcal{G}$ nicht leer ist, geben Sie eine Allokation im Kern des Spiels an.

5 27. Juli 2007

Bitte begründen Sie alle Ihre Antworten. Bearbeiten Sie die Klausur bitte in einer Stunde und ohne Hilfsmittel.
Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie folgendes Zweipersonenspiel (die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler 2 jeweils oben rechts angegeben):

		Spieler 2				
		f	g	h	i	j
	A	7 4	8 5	9 1	8 3	4 −2
	B	0 8	8 1	4 0	2 2	2 2
Spieler 1	C	−1 7	x 6	2 2	0 x	8 0
	D	4 5	5 −2	3 0	7 −3	5 −1
	E	0 6	2 2	8 4	5 −1	4 0

(a) Vorerst sei $x = 4$:

  i. Gibt es strikt dominierte Strategien? Wenn ja, warum? Geben Sie diese an.

  ii. Gibt es rekursiv strikt dominierte Strategien? Wenn ja, warum? Geben Sie diese an.

  iii. Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien (mit Begründung):

(b) Nun sei x beliebig. Geben Sie die Werte von x an für die sich ein weiteres Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ergibt (mit Begründung).

(c) Es gilt nun wieder $x = 4$. Bestimmen Sie alle möglichen Gleichgewichte in gemischten Strategien.

---

2. Anna und Bernd sind ein Paar. Abwechselnd haben sie die Möglichkeit, ihren Partner auszunutzen (und damit die Beziehung zu beenden) oder die Beziehung fortzuführen.

- Entscheidet sich ein Partner für Fortführen, erhalten beide eine Nutzeneinheit und die Beziehung wird in der nächsten Periode fortgesetzt.
- Entscheidet sich ein Partner für Ausnutzen, enthält dieser Partner zwei Nutzeneinheiten und der andere keine Nutzeneinheit. Ausserdem wird das Spiel dann nicht fortgesetzt.

In der ersten Runde entscheidet Anna über die Zukunft der beiden, in der zweiten Bernd, dann wieder Anna,… Nach 50 Runden endet das Spiel.

(a) Welches Lösungskonzept ist (in der rationalen Welt der Spieltheorie) für dieses Spiel angemessen?

(b) Wie lange hält diese Beziehung?

(c) Was ist der Gesamtnutzen von Anna? Was ist der Gesamtnutzen von Bernd?

Erklären Sie Ihre Lösung.

---

3. In einem Duopol konkurrieren die beiden Firmen a und b. Sie produzieren die Mengen q_a und q_b. Das Marktangebot ist $Q = q_a + q_b$. Die Nachfrage wird bestimmt durch die Funktion $p(Q) = A - 3 \cdot Q$. Die Grenzkosten der beiden Firmen sind konstant und kleiner als $A/2$.

(a) Bestimmen Sie das Nash Gleichgewicht im Cournot Modell. Geben Sie Lösungsweg, Mengen und Gewinne an.

(b) Skizzieren Sie die Reaktionsfunktionen der beiden Firmen in einem passenden Diagramm.

(c) Berechnen Sie nun die Produktionsmenge von Firma a, wenn diese als Stackelberg-Führer agiert.

4. Betrachten Sie folgendes Zweipersonenspiel (die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler 2 jeweils oben rechts angegeben):

Spieler 2

		d	e	f
	A	4 4	8 0	6 0
Spieler 1	B	0 8	0 0	1 1
	C	0 6	1 1	2 2

   (a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien (mit Begründung):

   (b) Was sind die minimax Auszahlungen der beiden Spieler?

   (c) Dieses Spiel wird nun unendlich oft wiederholt. Die Auszahlungen werden mit dem Diskontfaktor δ abdiskontiert. Nehmen Sie an, dass die Spieler die folgende Strategiekombination spielen:

   - Spieler 1 beginnt mit A und bleibt dabei, jedenfalls solange Spieler 2 d spielt. Tut Spieler 2 das einmal nicht, wird Spieler 1 fortan immer C spielen.
   - Spieler 2 beginnt mit d und bleibt dabei, jedenfalls solange Spieler 1 A spielt. Tut Spieler 1 das einmal nicht, wird Spieler 2 fortan immer f spielen.

   Für welche Werte von δ ist das ein Nash Gleichgewicht?

   (d) Ist diese Strategiekombination auch ein teilspielperfektes Gleichgewicht? Falls nicht, geben Sie eine Strategiekombination an, die die gleiche Auszahlung in einem teilspielperfektes Gleichgewicht ergibt.

6 April 2005

Begründen Sie bitte alle Ihre Antworten! Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und machen Sie klar, zu welcher Aufgabe Ihre Lösung jeweils gehört. Es gibt keine weiteren Hilfsmittel. Viel Erfolg

1. Eva betreibt einen Schnellimbiss und verkauft Currywurst. Die Produktionskosten einer Currywurst liegen bei 1 €. Die Verhandlungen zwischen Eva und ihren Kunden laufen wie folgt ab:

   - Eva schlägt einen Preis p_1 vor.
   - Der Kunde nimmt das Angebot entweder an oder er lehnt es ab. Falls er es annimmt, ist die Auszahlung von Eva $p_1 - 1$ und die Auszahlung des Kunden $b - p_1$, wobei b seine Zahlungsbereitschaft ist.

     Falls er es ablehnt, erhalten beide eine Auszahlung von Null.

   (a) Die Zahlungsbereitsschaft des Kunden ist 2. Welchen Preis p_1 schlägt Eva im Gleichgewicht vor?

   (b) Im folgenden gehen wir davon aus, dass es zwei Typen von Kunden gibt, hungrige und satte. Die hungrigen haben eine Zahlungsbereitschaft von 3, die satten eine Zahlungsbereitschaft von 2. Ein Anteil von $\rho = 2/3$ aller Kunden ist hungrig. Welche Preise p_1 kann Eva im Gleichgewicht vorschlagen?

   (c) Nun ist der Anteil der hungrigen Kunden $\rho = 1/2$. Welche Preise p_1 kann Eva im Gleichgewicht vorschlagen?

   (d) Nun ist der Anteil der hungrigen Kunden $\rho = 1/3$. Welche Preise p_1 kann Eva im Gleichgewicht vorschlagen?

   (e) Die Verhandlungen laufen nun anders ab.

   - Eva schlägt einen Preis p_1 vor.

- Der Kunde nimmt das Angebot entweder an oder er lehnt es ab. Falls er es annimmt, ist die Auszahlung von Eva $p_1 - 1$ und die Auszahlung des Kunden $b - p_1$, wobei b die Zahlungsbereitschaft ist.
- Falls der Kunde das Angebot ablehnt, treten Eva und ihr Kunde in die zweite Verhandlungsperiode ein. Auszahlungen aus dieser Periode werden mit dem Faktor δ abdiskontiert. Eva macht nun einen zweiten Vorschlag p_2.
- Der Kunde nimmt das Angebot der zweiten Periode entweder an oder er lehnt es ab. Falls er es annimmt, ist die Auszahlung von Eva $\delta \cdot (p_2 - 1)$ und die Auszahlung des Kunden $\delta \cdot (b - p_2)$. Falls er es ablehnt, erhalten beide eine Auszahlung von Null.

Überlegen Sie zuerst, was passiert, wenn die zweite Verhandlungsperiode erreicht wird. Gehen Sie davon aus, dass in der ersten Periode $\rho = 1/3$. Bezeichnen Sie den Anteil aller Hungrigen die das Angebot in der ersten Periode ablehnen mit h und den Anteil aller Satten die das Angebot in der ersten Periode ablehnen mit s. Bezeichnen Sie den relativen Anteil der Hungrigen in der zweiten Periode mit σ. Welches Angebot p_2 wird Eva machen? Hängt das Ergebnis von δ ab? Machen Sie gegebenenfalls Fallunterscheideungen.

(f) Was passiert in der ersten Verhandlungsperiode?

  i. Wie verhält sich ein satter Kunde in der ersten Runde?
  ii. Wie verhält sich ein hungriger Kunde in der ersten Runde?
  iii. Welches Angebot p_1 wird Eva in der ersten Runde machen?

---

2. Betrachten Sie das folgende Spiel:

$\mathcal{G}$ Spieler *II*

		A	*B*
Spieler *I*	*A*	3 3	4 0
	B	0 4	1 1

Das Spiel wird unendlich oft wiederholt. Die Auszahlungen der Spieler ist die mit dem Faktor δ abdiskontierte Summe der Auszahlungen der einzelnen Perioden

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t u_t.$$

Spieler *I* und *II* benutzten jeweils die Strategie *tit-for-tat*, d.h., sie beginnen in der ersten Periode mit *A* und wählen fortan die Aktion die der jeweils andere Spieler in der vorangegangenen Periode gewählt hat.

(a) Für welche Diskontfaktoren δ ist obige Kombination von Strategien ein Nash Gleichgewicht des unendlich wiederholten Spiels?

(b) Erklären Sie, warum für alle diese Diskontfaktoren obige Kombination von Strategien kein teilspielperfektes Gleichgewicht des unendlich wiederholten Spiels ist.

(c) Finden Sie eine Strategie für das unendlich wiederholte Spiel so dass es für hinreichend große δ ein teilspielperfektes Gleichgewicht darstellt wenn beide Spieler dieser Strategie folgen.

---

3. Betrachten Sie das folgende Spiel:

$\mathcal{H}$ Spieler *II*

		c	*d*	*e*
Spieler *I*	*A*	3 3	2 2	0 0
	B	0 0	2 4	4 4

(a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichte in reinen Strategien.

(b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichte in gemischten Strategien.

(c) Nun wird das Spiel zweimal gespielt. Die Auszahlung ist die Summe der Auszahlungen der beiden Perioden. Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem in der ersten Periode B, d gespielt wird?

(d) Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem in der ersten Periode A, e gespielt wird?

7 Februar 2005

Begründen Sie bitte alle Ihre Antworten! Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und machen Sie klar, zu welcher Aufgabe Ihre Lösung jeweils gehört. Es gibt keine weiteren Hilfsmittel.

Viel Erfolg

1. Betrachten Sie das folgende Spiel $\mathcal{G}$ in Normalform. Die Auszahlungen von Spieler I sind links unten, die Auszahlungen von Spieler II rechts oben angegeben.

$\mathcal{G}$		Spieler II	
		A	B
Spieler I	A	3 3	x x
	B	0 0	5 5

(a) Sei $x = 4$. Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte in reinen und gemischten Strategien. Welche Strategien sind evolutionär stabil?

(b) Sei $x = 2$. Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte in reinen und gemischten Strategien. Welche Strategien sind evolutionär stabil?

(c) Sei $x = 4$. Was ist die Minimax Auszahlung für jeden Spieler? (berücksichtigen Sie, wie in der Vorlesung, auch gemischte Strategien).

(d) Das Spiel werde unendlich oft wiederholt. Die Auszahlung der Spieler sei der Grenzwert des Mittelwertes der Auszahlungen $\lim_{T\to\infty} \inf \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T} u_t$.

Sei $x = 4$. Welche Auszahlungen können in einem teilspielperfekten Gleichgewicht erreicht werden?

(e) Sei x beliebig. Welche Auszahlungen können nun in einem teilspielperfekten Gleichgewicht des unendlich oft wiederholten Spieles erreicht werden? Machen Sie gegebenfalls Fallunterscheidungen.

(f) Sei $x = 4$. Nehmen Sie an es werde im unendlich oft wiederholten Spiel die folgende Strategiekombination gespielt:

Spieler I: Spiele immer A.

Spieler II: Beginne mit B und bleibe dabei, es sei denn, es ist irgendwann einmal nicht A, B gespielt worden (Spieler I hat nicht A gespielt oder Spieler II hat nicht B gespielt). Spiele ab dann immer A.

Ist diese Strategiekombination ein Nash Gleichgewicht?

Ist diese Strategiekombination ein teilspielperfektes Gleichgewicht?

(g) Gibt es für den Fall $x = 0$ im unendlich oft wiederholten Spiel ein teilspielperfektes Gleichgewicht, in dem beide Spieler eine Auszahlung von 2 bekommen? Falls ja geben Sie ein Beispiel für ein solches teilspielperfektes Gleichgewicht.

(h) Gibt es für den Fall $x = 0$ im unendlich oft wiederholten Spiel ein Nash Gleichgewicht, in dem beide Spieler eine Auszahlung von 2 bekommen und das nicht teilspielperfekt ist? Falls ja geben Sie ein Beispiel für ein solches Nash Gleichgewicht.

---

2. Eva und Maria verhandeln über einen Kuchen, der nur in n gleichgroße Stücke zerschnitten werden kann. Das Ergebnis der Aufteilung kann also durch eine ganze Zahl $i \in \{0,\ldots,n\}$ beschrieben werden, wobei dann Eva einen Anteil i/n bekommt und Maria einen Anteil $(n-i)/n$.

   Die Verhandlungen laufen wie folgt ab: In jeder Runde hat eine der beiden Spielerinnen die Möglichkeit, eine Aufteilung (einen Wert von i) auszuschließen. Eva beginnt, danach wechseln sich die beiden ab. Die Verhandlungen sind abgeschlossen, sobald nur noch eine Aufteilung übrig bleibt.

   (a) Sei $n=2$. Es gibt also drei mögliche Aufteilungen: Eva bekommt gar keinen Kuchen, sie bekommt den halben Kuchen, oder sie bekommt den ganzen Kuchen. Wieviel Strategien hat Eva? Wieviele Strategien hat Maria?

   (b) Finden Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte des Spieles. Welche Aufteilung wird erreicht?

   (c) Gibt es ein Nash Gleichgewicht das zu einer anderen Aufteilung führt? Wenn ja, beschreiben Sie es.

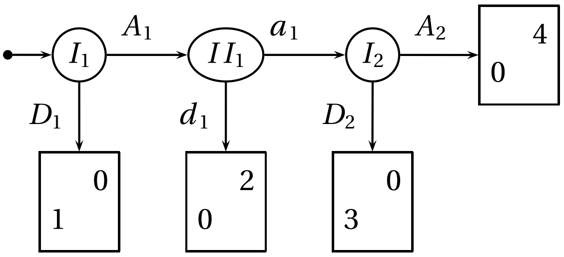
   (d) Sei $n=3$. Wieviele Strategien hat Eva jetzt? Wieviele Strategien hat Maria? (Falls Sie keine Lust haben, das Ergebnis im Kopf auszurechnen, schreiben Sie auf, was man ausrechnen müsste.)

   (e) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte für $n=3$.

   (f) Sei n eine beliebige Zahl. Auf welche Aufteilung einigen sich die beiden im teilspielperfekten Gleichgewicht?

---

3. Betrachten Sie das folgende Spiel in extensiver Form. Spieler I ist in den Knoten I_1 und I_2 am Zug. Spieler II ist nur im Knoten II_1 am Zug:



   (a) Wie viele Strategien hat Spieler I, wieviele hat Spieler II?

   (b) Finden Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte des Spieles.

   (c) Transformieren Sie das Spiel in Normalform und finden Sie alle Nash Gleichgewichte.

   (d) Betrachten Sie nun wieder das Spiel in extensiver Form: Spieler II hat allerdings erfahren, dass es zwei Typen von Spieler I gibt. Spieler, die das Spiel verstanden haben, und Spieler die immer A spielen (d.h. im Knoten I_1 spielen sie immer A_1 und im Knoten I_2 spielen sie immer A_2). Der Anteil der Spieler die immer A spielen ist ϵ, der Anteil der Spieler die das Spiel verstanden haben ist $1-\epsilon$.

   Nehmen Sie an, von den Spielern I, die das Spiel verstanden haben, wählt ein Anteil x im Knoten I_1 die Aktion A_1. Wenn Spieler II im Knoten II_1 zum Zug kommt, mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er dann auf einen Spieler I der das Spiel verstanden hat?

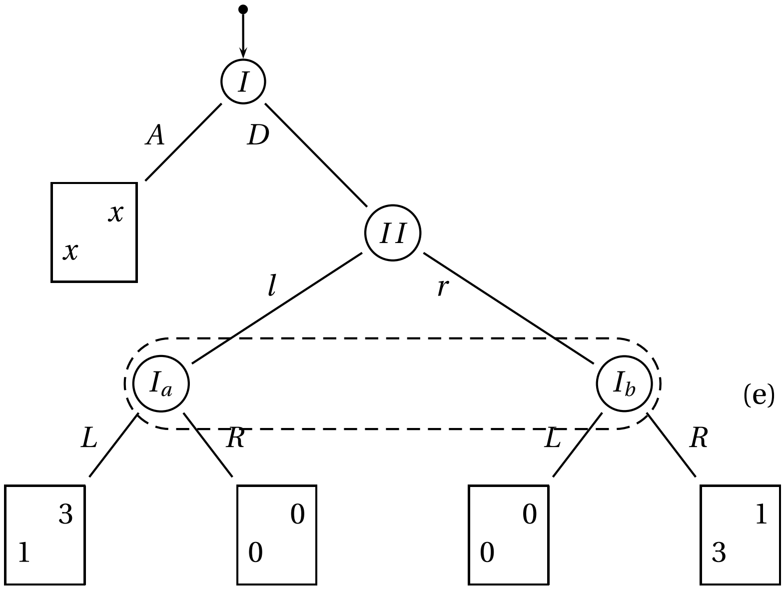
   (e) Gibt es in diesem Spiel ein Gleichgewicht in reinen Strategien? Falls ja, was ist es und welche Auszahlungen erhalten die Spieler?

   (f) Gibt es in diesem Spiel ein Gleichgewicht in gemischten Strategien? Falls ja, was ist es und welche Auszahlungen erhalten die Spieler?

8 April 2004

Begründen Sie bitte alle Ihre Antworten!

1. Betrachten Sie das folgende Spiel $\mathscr{G}$ in extensiver Form. Die Auszahlungen von Spieler I sind links unten, die Auszahlungen von Spieler II rechts oben angegeben. Wenn Spieler I sich in Knoten I_a oder I_b befindet, weiß er nur, dass er in einem der beiden Knoten ist, er kann nicht sagen, in welchem der beiden Knoten er sich befindet.



   (a) Welches Lösungskonzept ist für dieses Spiel angemessen?

   (b) Nehmen Sie an, dass $x = 2$ ist Wenden Sie das Lösungskonzept an, und bestimmen Sie alle Gleichgewichte.

   (c) Sei immer noch $x = 2$. Transformieren Sie das Spiel in Normalform und bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte.

   (d) Sei immer noch $x = 2$. Betrachten Sie wieder das Spiel in extensiver Form $\mathscr{G}$. Das Spiel wird mehrmals gespielt. Die Spieler können jeweils den Ausgang der vorangegangenen Runden beobachten. Ist es möglich, dass, wenn das Spiel zweimal gespielt wird, im Gleichgewicht in der ersten Runde DR, l gespielt wird? Falls nein, wie oft muss man das Spiel spielen, damit es ein Gleichgewicht gibt, in dem in der ersten Runde DR, l gespielt wird?

   (e) Betrachten Sie wieder das Spiel in extensiver Form $\mathscr{G}$. Sei x eine beliebige relle Zahl. Bestimmen Sie alle Gleichgewichte und machen Sie gegebenenfalls Fallunterscheidungen (Hinweis: kann es sein, dass Spieler I im Gleichgewicht über A und D mischt? Wenn ja, für welche Werte von x?)

---

2. Zwei Unternehmen stellen jeweils ein Produkt her, das gegebenenfalls durch eine neue Erfindung verbessert werden kann. Die Unternehmer gehen davon aus, dass der Wert der Erfindung für beide Unternehmen unabhängig und gleichverteilt im Intervall $[0, 100]$ ist. Wir nennen den Wert den die Erfindung für Unternehmen 1 hat v_1, und den Wert den die Erfindung für Unternehmen 2 hat v_2.

   Der Erfinder bietet nur den beiden Unternehmen das folgende Vorgehen an. Jeder Unternehmer i nennt dem Erfinder einen Preis p_i, und der Unternehmer mit dem höchsten Preis bekommt das Recht die Erfindung zu nutzen und muß den Preis zahlen. Sein Nutzen ist also $v_i - p_i$. Der Nutzen des Unternehmers mit dem niedrigeren Preis ist Null. Nennen beide Unternehmer den gleichen Preis, dann wirft der Erfinder eine faire Münze und bestimmt so, wer die Erfindung bekommt. Nur der muss dann seinen Preis zahlen, bekommt also $v_i - p_i$, der andere bekommt wieder Null.

   (a) Nehmen Sie zunächst an, dass beide zuerst ihren Preis p_i nennen müssen. Danach erst stellt sich heraus, wie sie die Erfindung bewerten (also wie groß v_i ist). Bestimmen Sie die Reaktionsfunktionen. Welchen Preis p_i geben die beiden Unternehmen im Gleichgewicht an?

(b) Nehmen Sie jetzt an, dass die beiden Unternehmen jeweils einen Agenten verwenden. Die beiden Agenten kennen den Wert v_i der Erfindung für jeweils für ihr Unternehmen i. Sie nennen, abhängig von v_i, den Preis $p_i = c_i + v_i$. Die Konstante c_i kann das Unternehmen jeweils bestimmen. Zu dem Zeitpunkt, zu dem die Konstante c_i bestimmt wird, ist der Wert v_i allerdings noch nicht bekannt. Bestimmen Sie wieder die Reaktionsfunktionen. Welche Konstanten c_i werden die Unternehmen im Gleichgewicht bestimmen?

(c) Jetzt nennt der Agent eines Unternehmens einen Preis $p_i = c_i + b_i v_i$ wobei c_i und b_i von den Unternehmen vorher festgelegt werden kann. Allerdings ist zu dem Zeitpunkt v_i noch nicht bekannt. Welche Werte für c_i und b_i werden die Unternehmen im Gleichgewicht festlegen?

---

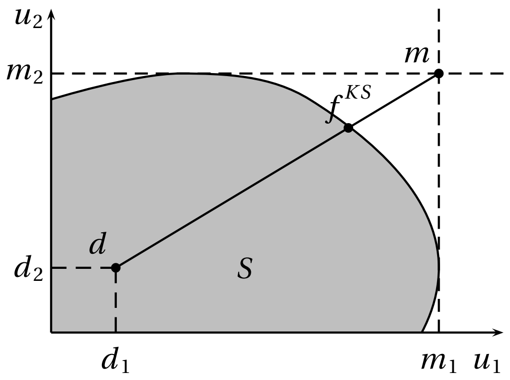
3. Ein Nash-Verhandlungsproblem wird durch einen Verhandlungsbereich S und durch einen Drohpunkt d beschrieben. Wir nehmen an, dass S kompakt und konvex ist und dass d in S liegt. Eine Verhandlungslösung ist eine Funktion $f(S,d)$ die einen Punkt aus S auswählt.

   Erinnern Sie sich, dass die Nash-Verhandlungslösung beschrieben werden kann als $f^N(S,d)$ die dem Problem (S,d) das folgende Element s_1, s_2 aus S zuordnet:

$$f^N(S,d) \equiv \underset{(d_1,d_2)\leq(s_1,s_2)\in S}{\arg\max} \; (s_1-d_1)(s_2-d_2)$$

   Kalai und Smorodinsky schlagen eine alternative Verhandlungslösung vor. Sie bezeichnen den maximalen Betrag den Spieler i in einer Allokation aus $s \in S$, wobei $s > d$ ist, bekommen kann mit m_i. So wird der Punkt m in der Skizze bestimmt.

   Wir betrachten nun die Gerade die durch d und m bestimmt wird, d.h. die Menge aller Punkte die durch $(x_1,x_2) = \alpha(m_1,m_2)+(1-\alpha)(d_1,d_2)$ gegeben ist. Wir bewegen uns auf dieser Geraden von Punkt d aus in Richtung des Punktes m. An der Stelle, an der wir den Verhandlungsbereich S verlassen, liegt die Kalai-Smorodinsky Verhandlungslösung f^{KS}.



(a) Untersuchen Sie das Verhandlungsproblem (S,d) in dem $d = (0,0)$ und S die konvexe Hülle der Punkte $(0,0)$, $(4,0)$, und $(0,2)$ (das heisst, das S ist die dreieckige Fläche, die diese Punkte als Eckpunkte hat).

   Was ist die Kalai-Smorodinsky Verhandlungslösung f^{KS} für dieses Problem? Was ist die Nash Verhandlungslösung f^N für dieses Problem?

(b) Ist die Kalai-Smorodinsky Lösung immer eindeutig? Welche Annahme braucht man dazu?

(c) Geben Sie ein einfaches Beispiel für ein Verhandlungsproblem (S,d) in dem $f^{KS} \neq f^N$, in dem also die Kalai-Smorodinsky Lösung nicht mit der Nash Verhandlungslösung zusammenfällt.

(d) Welche Axiome der Nash-Verhandlungslösung werden durch f^{KS} erfüllt, welche nicht. Für Axiome die nicht erfüllt werden, geben Sie bitte ein Gegenbeispiel. Für Axiome die erfüllt werden, begründen Sie bitte Ihre Antwort mit einer kurzen Rechnung.

9 Februar 2004

Begründen Sie bitte alle Ihre Antworten! Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie bitte das folgende Spiel in Normalform:

		Spieler II	
		L	R
Spieler I	T	0 0	4 a
	D	a 4	4 4

   (a) Sei $a = 4$. Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte des Spiels.

   (b) Das Spiel wird nun dreimal gespielt. Die Auszahlung des wiederholten Spiels ist die Summer der Auszahlungen der einzelnen Perioden. Beide Spieler können in jeder Wiederholung beobachten, was vorher gespielt wurde.

      i. Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem in einer der Perioden T, L gespielt wird.

      ii. Was können Sie über die teilspielperfekten Gleichgewichte sagen?

   (c) Was muss für a gelten, damit es im dreimal gespielten Spiel ein teilspielperfektes Gleichgewicht gibt, in dem in der ersten Periode T, L gespielt wird.

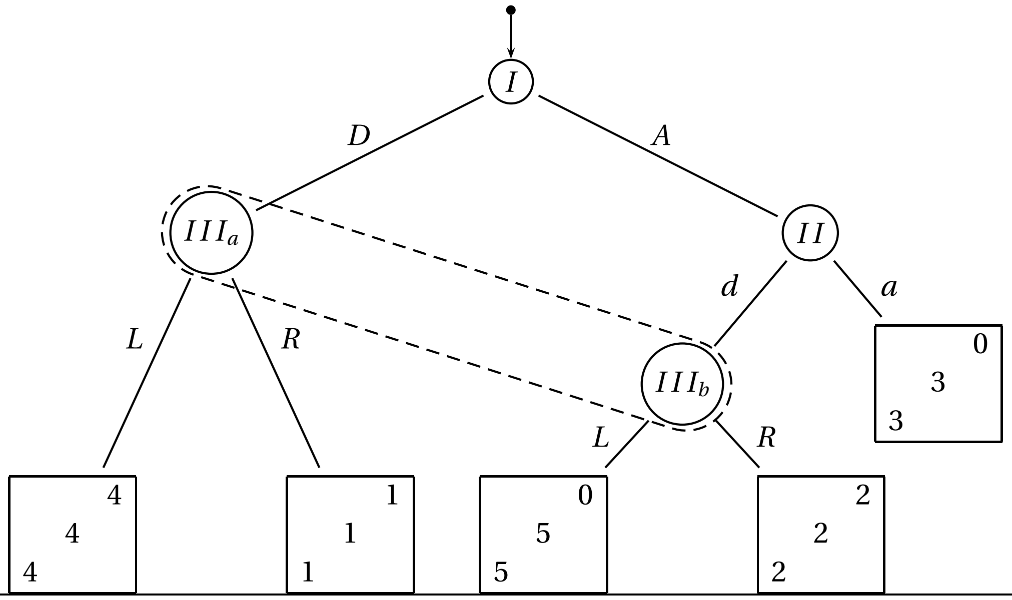
---

2. Betrachten Sie das folgende Spiel in extensiver Form. Die Auszahlungen von Spieler I sind links unten, die Auszahlungen von Spieler II in der Mitte, und die Auszahlungen von Spieler III sind rechts oben angegeben. Spieler III kann nicht unterscheiden, ob er sich in Knoten III_a oder III_b befindet.

   (a) Welche Lösungskonzept ist für dieses Spiel angemessen.

   (b) Wenden Sie das Lösungskonzept an, und bestimmen Sie **alle** Gleichgewichte.

   (c) Gibt es unter den Gleichgewichten solche die mehr und solche die weniger plausibel sind?



---

3. Ein Nash-Verhandlungsproblem wird durch einen Verhandlungsbereich S und durch einen Drohpunkt d beschrieben. Wir nehmen an, dass S kompakt ist und dass d in S liegt. Eine Verhandlungslösung ist eine Funktion $f(S, d)$ die einen Punkt aus S auswählt.

   Erinnern Sie sich, dass die Nash-

Verhandlungslösung beschrieben werden kann als Funktion $f^N(S,d)$ die dem Problem (S,d) das folgende Element s_1, s_2 aus S zuordnet:

$$\operatorname*{argmax}_{(d_1,d_2)\leq(s_1,s_2)\in S} (s_1-d_1)(s_2-d_2)$$

(a) Betrachten Sie nun die folgende Lösung eines Verhandlungsproblems, nach der die Spieler stets den durch den Drohpunkt festgelegten Nutzen erhalten.

Welche Axiome der Nash-Verhandlungslösung werden durch diese Lösung erfüllt, welche nicht.

(b) Betrachten Sie nun die Lösung $f^G(S,d)$ eines Verhandlungsproblems die dem Problem (S,d) das folgende Element s_1, s_2 aus S zuordnet:

$$\operatorname*{argmax}_{(d_1,d_2)\leq(s_1,s_2)\in S} \sqrt{s_1-d_1}+\sqrt{s_2-d_2}$$

und untersuchen Sie das Verhandlungsproblem (S,d) in dem $d=(0,0)$ und S die konvexe Hülle der Punkte $(0,0)$, $(1,0)$, und $(0,2)$ ist (das heißt, S ist die dreieckige Fläche, die diese Punkte als Eckpunkte hat).

Was ist f^G für dieses Problem? Was ist f^N für dieses Problem?

(c) Sei nun (S,d) wieder ein allgemeines Problem. Welche Axiome der Nash-Verhandlungslösung werden durch f^G (definiert wie in 3b) erfüllt, welche nicht. Begründen Sie für jedes Axiom Ihre Antwort durch eine kurze Rechung.

---

4. Zwei Werbeagenturen, A und B, bewerben sich um einen Auftrag. Wenn sie nichts tun haben sie die gleichen Chancen, den Auftrag zu bekommen. Sie können jeweils eine Präsentation vorbereiten, um ihre Chancen zu verbessern. Falls das nur eine Agentur macht, bekommt sie den Auftrag, falls beide das tun, sind die Chancen gleich.

(a) Nehmen Sie an, dass die Kosten eine Präsentation vorzubereiten 1000 sind. Der Auftrag hat einen Wert von W.

Was werden die Agenturen im Gleichgewicht machen? Wie hängen die Gleichgewichte von W ab?

(b) Jetzt nehmen Sie an, dass die Agenturen mehr oder weniger in die Präsentation investieren können. Agentur A wählt eine Investition e_A und Agentur B wählt eine Investition e_B. Die Investition e_A und e_B wird in den gleichen Geldeinheiten gemessen wie W. Wenn Agentur i den Auftrag bekommt, hat sie einen Reingewinn von $W-e_i$, wenn sie den Auftrag nicht bekommt, ist der Reingewinn $-e_i$.

Wenn $e_A > e_B$ bekommt A den Auftrag, wenn $e_A < e_B$ bekommt B den Auftrag. Falls $e_A = e_B$ entscheidet das Los und beide haben die gleichen Chancen.

Nehmen Sie zunächst an, dass die Investitionen e_A und e_B nach oben beschränkt sind und nicht größer als αW sein können.

Sei $\alpha = 1/2$. Was ist nun ein Gleichgewicht?

(c) Sei $\alpha = 1$. Was kann man nun über das Gleichgewicht sagen? Gibt es gemischte Gleichgewichte?

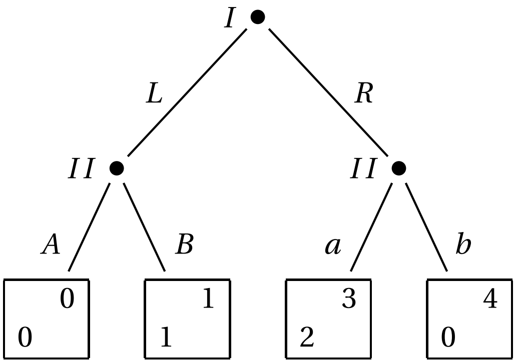
(d) Nun sei die Investition nicht mehr nach oben beschränkt. Was kann man nun über das Gleichgewicht sagen? Gibt es gemischte Gleichgewichte?

(e) Nehmen Sie nun an, dass nicht mehr die Agentur mit der größeren Investition den Auftrag, und damit den Gewinn von W erhält. Statt dessen geht der Auftrag mit Wahrscheinlichkeit $e_A/(e_A+e_B)$ an A und mit Wahrscheinlichkeit $e_B/(e_A+e_B)$ an B.

Was ist jetzt ein Gleichgewicht?

10 April 2003

1. Betrachten Sie folgendes Spiel $\mathscr{G}$ in extensiver Form (Die Auszahlung von Spieler I steht jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler II steht oben rechts):



   (a) i. Transformieren Sie das Spiel in Normalform.

   ii. Bestimmen Sie **alle** Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

   iii. Das Normalformspiel wird nun zweimal hintereinander gespielt. Die Auszahlung des wiederholten Spiels ist die Summe der Auszahlungen des Stufenspiels. Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in reinen Strategien, in dem Spieler I mehr als 2 bekommt? Warum?

   iv. Bestimmen Sie für das Spiel $\mathscr{G}$ in extensiver Form die teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien.

   (b) Betrachten Sie nun ein Nash Verhandlungsspiel über die Auszahlungen von $\mathscr{G}$ (die „Verhandlungsmacht“ beider Spieler sei gleich). Nehmen Sie an, dass Spieler beliebig Nutzen transferieren können. Der Drohpunkt (Disagreementpoint) sei die Auszahlung eines teilspielperfekten Gleichgewichtes von $\mathscr{G}$ (Falls Sie in Aufgabe 1(a)iv mehrere teilspielperfekte Gleichgewichte gefunden haben, geben Sie an welches Sie wählen).

   i. Was ist die Nash Verhandlungslösung

   ii. Nehmen Sie nun an, daß Nutzen nicht transferiert werden kann. Lotterien über Auszahlungen sind aber möglich. Was ist jetzt die Nash Verhandlungslösung

   (c) Betrachten Sie nun das Nash threat game: Spieler wählen Strategien die den Drohpunkt der Nash Verhandlungsspiels liefern. Setzen Sie transferierbaren Nutzen voraus.

   i. Finden Sie Sie **alle** Gleichgewichte des Nash Threat Game.

   ii. Welche Nash-Verhandlungslösung ergibt sich für jedes der Gleichgewichte aus 1(c)i?

   (d) In Aufgabe 1(a)ii haben Sie alle Nash-Gleichgewichte von $\mathscr{G}$ in *reinen* Strategien berechnet.

   i. Zeigen Sie, daß es ein Nash-Gleichgewicht von $\mathscr{G}$ gibt, in welchem Spieler II eine gemischte Strategie verwendet.

   ii. Zeigen Sie, daß es **kein** Nash-Gleichgewicht von $\mathscr{G}$ gibt, in welchem Spieler I eine gemischte Strategie verwendet.

---

2. Finden Sie alle Nash Gleichgewichte im folgenden Spiel. Erklären Sie, warum es keine weiteren Gleichgewichte gibt?

		Spieler II		
		A	B	C
Spieler I	a	0 0	4 5	5 4
	b	5 4	0 0	4 5
	c	4 5	5 4	0 0

3. Betrachten Sie ein Rubinstein-Verhandlungsspiel in dem ein Dollar aufgeteilt werden soll. Auszahlungen werden nicht abdiskontiert aber in jeder Periode, in der sich die Spieler nicht einigen, entstehen den Spielern Kosten. Die Kosten sind c_1 pro Periode für Spieler 1 und c_2 für Spieler 2. Nehmen Sie an dass $c_1 + c_2 < 1$.
   (a) Nehmen Sie an, dass $c_1 < c_2$, d.h. Spieler 2 hat größere Kosten. Was ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht des Spiels? Warum?
   (b) Nehmen Sie nun an, dass $c_1 > c_2$, d.h. Spieler 1 hat größere Kosten. Was ist nun ein teilspielperfektes Gleichgewicht des Spiels? Warum?
   (c) Was ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht des Spiels wenn $c_1 = c_2$? Warum?

4. Zwei Leute, A und B, können zur Produktion eines öffentlichen Gutes beitragen. Wenn mindestens eine Person „beiträgt“, haben beide einen Nutzen von 4. Wenn niemand beiträgt, ist der Nutzen für beide Null. Wenn Spieler A zur Produktion beiträgt, entstehen ihm Kosten c_A. Wenn Spieler B zur Produktion beiträgt, entstehen ihm Kosten c_B. Die folgende Matrix gibt für jede Strategienkombination die Auszahlung der Spieler an:

   Der Betrag c_A kann die Werte 1 und 3 annehmen. Der Betrag c_B kann ebenfalls die Werte 1 und 3 annehmen. Jeder Spieler $i \in \{A, B\}$ kennt sein eigenes c_i, aber nicht das seines Gegenüber. Es ist common knowledge, daß unabhängig voneinander der Betrag von c_i mit Wahrscheinlichkeit p den Wert 3 annimmt. Zeigen Sie, daß für $\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{3}{4}$ ein Bayesianisches Gleichgewicht existiert, in dem Spieler mit niedrigem c_i beitragen und solche mit hohem c_i nicht.

		Spieler B	
		beitragen	nicht beitragen
Spieler A	beitragen	$4-c_B$ $4-c_A$	4 $4-c_A$
	nicht beitragen	$4-c_B$ 4	0 0

11 Februar 2003

1. Betrachten Sie folgendes symmetrisches Zweipersonenspiel:

		Spieler 2			
		t_1	t_2	t_3	t_4
Spieler 1	s_1	3 3	2 5	2 7	2 1
	s_2	5 2	4 4	7 x	6 0
	s_3	7 2	x 7	0 0	0 1
	s_4	1 2	0 6	1 0	2 2

   Die Auszahlung von Spieler 1 ist jeweils unten links angegeben, die von Spieler 2 jeweils oben rechts.

(a) Wir beginnen mit dem Fall $x = 0$.

  i. Welche Strategien sind strikt dominiert? Warum?

  ii. Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien. Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Nun sei x beliebig. Finden Sie alle Werte von x für die sich vier Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien ergeben. Begründen Sie ihre Antwort.

(c) Wir kehren wieder zurück zum Fall $x = 0$. Das Spiel werde nun unendlich oft wiederholt. Auszahlungen werden mit dem Diskontfaktor $\delta = 3/5$ abdiskontiert. Gibt es ein Gleichgewicht, in dem in allen Perioden s_2, t_2 gespielt wird? Falls ja, geben Sie ein Beispiel für eine Strategiekombination die zu einem solchen Gleichgewicht führt und begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Wir bleiben bei $x = 0$, betrachten aber nun das unendlich oft wiederholte Spiel in dem die Auszahlungen als “limit of the means” bestimmt werden. Geben Sie mit Hilfe einer Graphik an, welche Kombinationen von Auszahlungen der beiden Spieler im teilspielperfekten Gleichgewicht erreicht werden können. Begründen Sie Ihre Antwort.

---

2. Zwei Spieler spielen das folgende Normalformspiel $\mathscr{G}$, wobei c ein fest vorgegebener positiver Parameter ist ($c \geq 0$, die Auszahlung von Spieler *I* steht jeweils unten links, die Auszahlung von Spieler *II* steht oben rechts):

$\mathscr{G}$:		Spieler *II*	
		L	*R*
Spieler *I*	*T*	1 $3-c$	0 $-c$
	B	0 0	3 1

(a) Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte für den Fall $0 \leq c \leq 3$ (Hinweis: Betrachten Sie den Fall $c = 3$ gesondert.).

(b) Nun haben sich die Spieler darauf geeinigt, vor Spielbeginn einmal eine Münze zu werfen. Beide Spieler beobachten das Ergebnis, Kopf oder Zahl.

  i. Wieviele reine Strategien hat Spieler *I* jetzt? Schreiben Sie die Strategien auf und denken Sie daran, Ihre Notation zu erklären.

  ii. Es sei nun $c = 0$. Stellen Sie graphisch für das erweiterte Spiel alle im Gleichgewicht erreichbaren Auszahlungen dar (beschriften Sie bitte die Graphik klar und begründen Sie Ihr Ergebnis).

(c) Anstatt eine Münze zu werfen, engagieren die Spieler einen Schiedsrichter (dabei entstehen keine Kosten). Der Schiedsrichter wählt einen der Ausgänge (T, L), (T, R) und (B, R) aus, und zwar jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/3. Gegeben diese Auswahl empfiehlt er jedem Spieler nur dessen Strategie, sagt also Spieler *I* ob er *T* oder *B* spielen soll, und Spieler *II* ob er *L* oder *R* spielen soll.

  i. Was sind die Beliefs der beiden Spieler in ihren jeweiligen Informationsbezirken?

  ii. Für welche positiven Werte von c ($c \geq 0$) gibt es ein Bayesianisches Gleichgewicht in dem sich beide Spieler immer an die Empfehlung des Schiedsrichters halten?

(d) Betrachten Sie das Spiel, in welchem zuerst Spieler *I* seine Aktion wählt, Spieler *II* dies beobachtet und anschließend seine Aktion wählt.

  i. Zeichnen Sie diesen Spielverlauf in extensiver Form.

  ii. Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte.

(e) Betrachten Sie nun folgende Zeitstruktur für $c = 0$:

Periode 1: Spieler *I* legt sich fest, ob er *T* oder *B* spielen wird.

Spieler II kann sich simultan auf L oder R festlegen, oder warten, bis er in Periode 2 über die Entscheidung von Spieler I informiert wird.

Periode 2: Wenn Spieler II gewartet hat, so wird er jetzt über die Entscheidung (T oder B) von Spieler I informiert und muß sich dann auf seine Aktion L oder R festlegen.

Die Auszahlungen beider Spieler werden mit dem Diskontfaktor $\delta = \frac{2}{3}$ abdiskontiert falls Spieler II wartet und sich erst in Periode 2 entscheidet.

i. Zeichnen Sie den Spielverlauf in extensiver Form.
ii. Wieviele reine Strategien hat Spieler I, wieviele hat Spieler II?
iii. Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien.
iv. Finden Sie ein Nash Gleichgewicht, das nicht teilspielperfekt ist.
v. Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht, in dem Spieler II in Periode 1 zwischen seinen Aktionen L und R mischt und nie bis Periode 2 wartet?

(f) Betrachten Sie nun folgende Zeitstruktur ($c = 0$):

Periode 1: Spieler I kann sich auf T oder B festlegen *oder* er kann warten.

Spieler II kann sich auf L oder R festlegen *oder* er kann warten.

Periode 2: Jeder Spieler der gewartet hat, wird jetzt über die Entscheidung seines Opponenten (T oder B oder warten, bzw. L oder R oder warten) informiert. Danach muß sich der Spieler auf T oder B bzw. L oder R festlegen.

Sobald sich beide Spieler auf ihre Aktion im Spiel $\mathcal{G}$ festgelegt haben, erhalten sie die dort beschriebenen Auszahlungen. Falls sich einer oder beide Spieler erst in Periode 2 entscheiden, werden die Auszahlungen beider Spieler mit dem Diskontfaktor $\delta = \frac{2}{3}$ abdiskontiert.

i. Zeichnen Sie den Spielverlauf in extensiver Form.
ii. Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht in reinen Strategien in dem beide Spieler warten und in in der zweiten Periode (T, L) gespielt wird?

---

3. In einem modifizierten Rubinstein-Verhandlungsspiel soll ein Dollar aufgeteilt werden. In Periode 1 macht Spieler 1 einen Vorschlag. Falls das Spiel nicht in dieser Periode endet, macht in Periode 2 Spieler 2 einen Vorschlag. Falls das Spiel nicht endet, macht dann in Periode 3 wieder Spieler 1 einen Vorschlag,...

Wenn Spieler i einen Vorschlag $(x_i, 1 - x_i)$ macht, wie der Dollar aufgeteilt werden soll, dann hat der andere Spieler (nennen wir ihn j) drei Möglichkeiten:

- Spieler j kann den Vorschlag annehmen. In diesem Fall endet das Spiel, Spieler 1 erhält x_i, und Spieler 2 erhält $1 - x_i$.
- Spieler j kann eine “outside-option” wählen. In dem Fall endet das Spiel, Spieler j bekommt x_0, Spieler i bekommt nichts.
- Spieler j kann nichts tun. Dann geht das Spiel in der nächsten Periode weiter. In dieser Periode macht nun Spieler j einen Vorschlag wie oben, Spieler i kann diesen Vorschlag annehmen, oder die “outside-option” wählen, oder nichts tun...

Der Diskontfaktor $\delta \in (0, 1)$ ist für beide Spieler gleich.

Nehmen Sie an dass $x_0 < \delta/(1 - \delta)$ (für beide Spieler gleich). Was ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht dieses Spiels. Begründen Sie Ihre Antwort.

12 23. April 2001

Lösen Sie bitte alle folgenden Aufgaben. Denken Sie bitte an eine vollständige Begründung Ihrer Antworten! Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie das folgende symmetrische Zweipersonenspiel (Auszahlungen von Spieler $\mathscr{A}$ unten links, von Spieler $\mathscr{B}$ oben rechts): Finden Sie alle Nash Gleichgewichte dieses Spiels. Begründen Sie, warum das von Ihnen verwendete Vorgehen ausreicht, alle Gleichgewichte zu finden.

Spieler $\mathscr{B}$

		t_1	t_2	t_3
	s_1	8 8	5 7	4 −4
Spieler $\mathscr{A}$	s_2	7 5	1 1	0 2
	s_3	−4 4	2 0	10 10

---

2. In einem Rubinstein-Verhandlungsspiel, in dem ein Dollar aufgeteilt werden soll, spielt ein unendlich lang lebender Spieler 1 gegen eine Folge kurzlebiger Spieler $2, 3, 4\ldots$, die jeweils nur zwei Perioden existieren. Der Diskontfaktor δ ist für alle Spieler gleich.

   Sei $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. In allen Perioden $2n$ macht Spieler 1 ein Angebot an Spieler $n+2$. In Periode $2n+1$ macht Spieler $n+2$ ein Angebot an Spieler 1.

   Wenn also (i/j) beschreibt, daß Spieler i ein Angebot an Spieler j macht, dann läuft das Spiel (solange kein Spieler ein Angebot annimmt) wie folgt:

   $$\begin{array}{c}(1/2)\\(2/1)\\(1/3)\\(3/1)\\(1/4)\\(4/1)\\\vdots\end{array}$$

   (a) Prüfen Sie, ob die folgende Strategiekombination ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist: Jeder vorschlagende Spieler schlägt den Anteil $\frac{1}{1+\delta}$ für sich selbst vor und nimmt jedes Angebot an, falls er wenigstens $\frac{\delta}{1+\delta}$ bekommt. Begründen Sie Ihre Antwort.

   (b) Gibt es andere teilspielperfekte Gleichgewichte?

---

3. Betrachten Sie das folgende Spiel, an dem zwei Spieler beteiligt sind und das in zwei Stufen eingeteilt ist. In der ersten Stufe spielen die zwei Spieler das unten beschriebene Spiel A (Die Auszahlungen stehen für Spieler 1 links unten, für Spieler 2 rechts oben).

Spiel A		Spieler $\mathscr{B}$	
		1	2
Spieler $\mathscr{A}$	1	4 4	5 1
	2	1 5	2 2

Der Ausgang des Spieles in der ersten Stufe bestimmt, welches Spiel in der zweiten Stufe gespielt wird. Wurde im ersten Spiel (s_1, t_1) oder (s_2, t_2) gespielt, dann spielen die Spieler in der zweiten Periode das Spiel B, andernfalls spielen sie in der zweiten Periode das Spiel C.

Spiel B		Spieler $\mathscr{B}$	
		3	4
Spieler $\mathscr{A}$	3	2 2	5 a
	4	a 5	-1 -1

Spiel C		Spieler $\mathscr{B}$	
		5	6
Spieler $\mathscr{A}$	5	3 3	-5 -7
	6	-7 -5	1 1

Die Auszahlung des Zweistufenspiels ist die Summe der Auszahlungen beider Perioden. Zwischen den Perioden erfährt jeder Spieler, welche Strategie der andere in der ersten Periode gespielt hat.

(a) Wieviele Teilspiele besitzt dieses Zweistufenspiel? (Zählen Sie das Spiel selbst mit)

(b) Wie kann eine Strategie von Spieler 1 und von Spieler 2 notiert werden? Geben Sie ein Beispiel und machen Sie Ihre Notation klar!

(c) Sei $a = 3$. Zeigen Sie, daß das obige Zweistufenspiel ein teilspielperfektes Gleichgewicht besitzt, in dem Spieler 1 die Auszahlung 9 erhält! Benutzen Sie dabei die Notation aus Aufgabe 2!

(d) Sei nun $a = 0$.

   i. Finden Sie alle Gleichgewichte des Spieles C!

   ii. Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht des Zweistufenspiels in dem Spieler 1 die Auszahlung 9 erhält?

---

4. Betrachten Sie folgendes Spiel:

		Spieler I	
		a	b
Spieler II	A	-1 -1	1 1
	B	1 1	-1 -1

(a) Bestimmen Sie **alle** Nash-Gleichgewichte! Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Nun wird das Spiel zweimal hintereinander gespielt. Der Payoff der Spieler ist die Summe der Auszahlungen beider Runden.

   i. Bestimmen Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht in **reinen** Strategien in welchem **nicht** in allen Teilspielen die in der zweiten Periode beginnen, die gleiche Strategiekombination des Stufenspielt gespielt wird. Achten Sie darauf, die Strategien der Spieler vollständig zu beschreiben. Begründen Sie, warum Ihre Lösung ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist.

   ii. Zeigen Sie, daß **alle** teilspielperfekten Gleichgewichte in **reinen** Strategien zu identischen Auszahlungen führen.

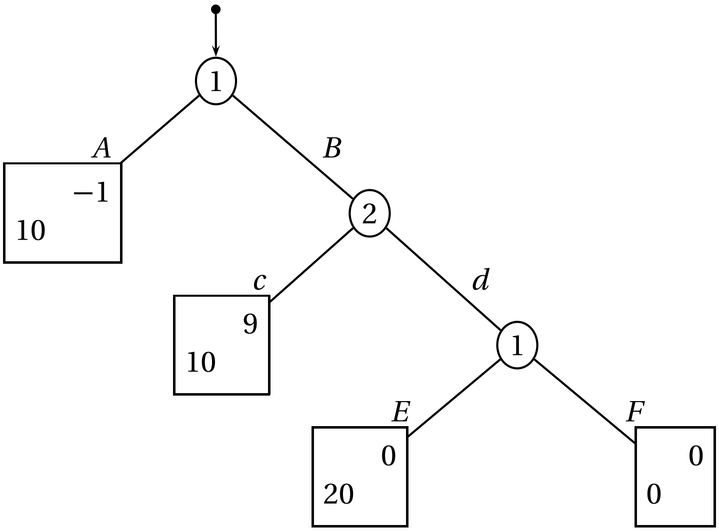
(c) Nehmen Sie nun an, daß das Spiel n mal wiederholt wird. Der Payoff der Spieler ist die Summe der Auszahlungen aller n Runden.

   i. Bestimmen Sie ein teilspielperfektes Gleichgewichte in **reinen** Strategien in welchem für wenigstens eine Periode **nicht** in allen Teilspielen die gleiche Strategiekombination des Stufenspieles gespielt wird. Beschreiben Sie die Strategien der Spieler vollständig.

   ii. Zeigen Sie, daß **alle** teilspielperfekten Gleichgewichte in **reinen** Strategien zu identischen Auszahlungen führen.

13 14. Februar 2001

1. Betrachten Sie folgendes Spiel $\mathscr{G}$:



(Die Auszahlungen für Spieler $\mathscr{A}$ stehen unten links, die für Spieler $\mathscr{B}$ oben rechts).

(a) Zählen Sie alle reinen Strategien von Spieler 1 auf.

(b) Schreiben Sie das Spiel in Bimatrixform!

(c) Finden Sie **alle** Nash-Gleichgewichte des Spiels $\mathscr{G}$!

(d) Finden Sie **alle** teilspielperfekten Gleichgewichte des Spiels $\mathscr{G}$!

(e) Das Spiel $\mathscr{G}$ wird nun zweimal hintereinander gespielt. Die Auszahlung des wiederholten Spiels ist die Summe der Auszahlungen der beiden Perioden.

Gibt es ein teilspielperfektes Gleichgewicht des wiederholten Spieles, so daß Spieler $\mathscr{A}$ einen Payoff von 30 und Spieler $\mathscr{B}$ einen Payoff von 9 erhält? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. In einem Rubinstein-Verhandlungsspiel machen zwei Spieler abwechselnd einen Vorschlag, wie ein „schrumpfender Kuchen“ aufzuteilen ist. Erst macht Spieler 1 einen Vorschlag, dann Spieler 2, dann wieder Spieler 1, usw. Es sind nur Vorschläge erlaubt, bei denen entweder einer der Spieler den gesamten Kuchen bekommt, oder bei denen der Kuchen zu gleichen Teilen aufgeteilt wird. Die zulässigen Vorschläge sind also $(0,1)$, $(1,0)$ und $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Die erste Zahl gibt stets den Anteil von Spieler 1, die

zweite Zahl stets den Anteil von Spieler 2 an. Benutzen Sie bitte für die Lösung diese Notation um Vorschläge (Züge) beschreiben.

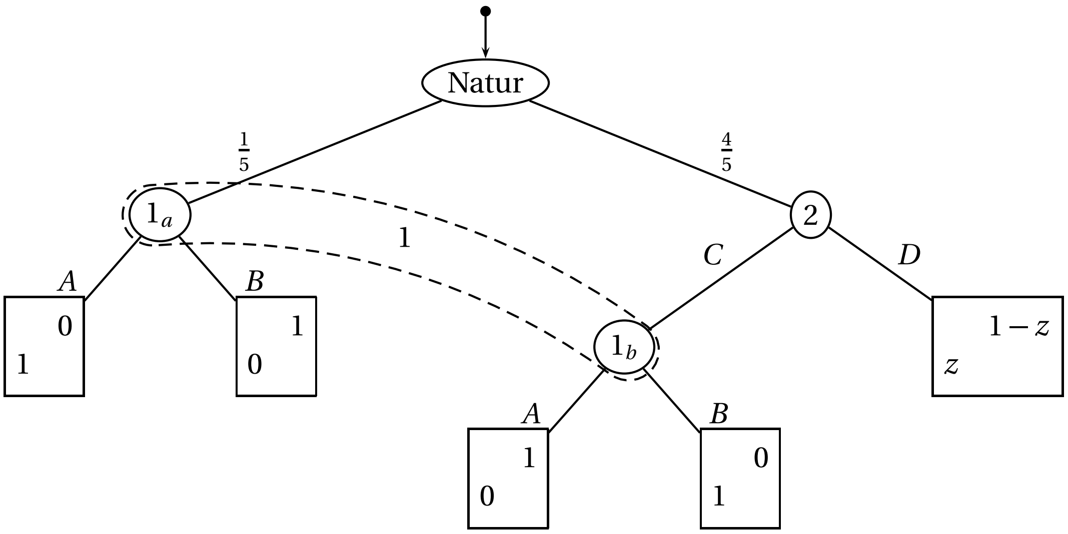
Der Kuchen schrumpft mit einem Diskontfaktor $\delta < 1$. Nehmen Sie an, daß δ nahe bei 1 liegt.

(a) Welche der obigen drei Aufteilungen können in einem teilspielperfekten Gleichgewicht in reinen Strategien resultieren in welchem sich die Spieler sofort einigen (sofort heißt, daß in der ersten Periode Spieler 1 einen Vorschlag macht und Spieler 2 ihn annimmt).

Geben Sie für jede dieser Auszahlungen ein Beispiel für ein teilspielperfektes Gleichgewicht, das sofort zu dieser Auszahlung führt.

(b) Finden Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht in dem **keine** Einigung in der ersten Periode erfolgt!

3. Betrachten Sie das folgende Spiel: Es beginnt mit einem Zufallszug, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ wird nach links gezogen, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ nach rechts. Links kommt Spieler $\mathscr{A}$ zum Zug, rechts Spieler $\mathscr{B}$. Zieht Spieler $\mathscr{B}$ nach links (C), kommt Spieler $\mathscr{A}$ zum Zug, zieht Spieler $\mathscr{B}$ nach rechts (D), endet das Spiel. Alle Züge von Spieler $\mathscr{A}$ beenden das Spiel. Wenn Spieler $\mathscr{A}$ zum Zug kommt, weiß er nicht, ob er sich in Knoten 1_a oder 1_b befindet (die gestrichelte Linie bezeichnet einen Informationsbezirk für Spieler 1). Die Auszahlungen stehen links unten für Spieler $\mathscr{A}$ und rechts oben für Spieler $\mathscr{B}$.



(a) Wieviele und welche Teilspiele besitzt das Spiel? Geben Sie für jedes Teilspiel an, welche der Knoten Natur, 1_a, 1_b und 2 das Teilspiel enthält.

(b) Zählen Sie alle reinen Strategien von Spieler 1 auf.

(c) Welches der Gleichgewichtskonzepte, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben, ist zur Lösung dieses Spiels angemessen. Worauf müssen Sie achten? Begründen Sie Ihre Antwort. Verwenden Sie im folgenden dieses Konzept.

(d) Setzen Sie $z = -100$. Bestimmen Sie alle Gleichgewichte.

Wenn Spieler $\mathscr{A}$ zum Zug kommt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er dann in Knoten 1_a und mit welcher Wahrscheinlichkeit in Knoten 1_b?

(e) Setzen Sie $z = +100$. Bestimmen Sie wieder alle Gleichgewichte.

Wenn Spieler $\mathscr{A}$ zum Zug kommt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er jetzt in Knoten 1_a und mit welcher Wahrscheinlichkeit in Knoten 1_b?

(f) Nehmen Sie jetzt an, daß Spieler $\mathscr{B}$ eine gemischte Strategie $(\beta, 1-\beta)$ spielt. Er zieht mit Wahrscheinlichkeit β nach links (C), und mit Wahrscheinlichkeit $1-\beta$ nach rechts (D). Spieler $\mathscr{A}$ kennt β.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Spieler $\mathscr{A}$, wenn er denn zum Zug kommt, in Knoten 1_a bzw. in Knoten 1_b?

(g) Was ist, gegeben diese Wahrscheinlichkeit, die beste Antwort von Spieler $\mathscr{A}$ auf eine gegebene gemischte Strategie $(\beta, 1-\beta)$ von Spieler $\mathscr{B}$?

(h) Nun nehmen Sie an, daß $z = \frac{1}{2}$ ist und Spieler 1 die gemischte Strategie $(\alpha, 1-\alpha)$ spielt. Er zieht mit Wahrscheinlichkeit α nach links (A), und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ nach rechts (B). Spieler $\mathscr{B}$ kennt α.

Was ist in diesem Fall die beste Antwort von Spieler $\mathscr{B}$?

(i) Bestimmen Sie für $z = \frac{1}{2}$ die Gleichgewichtsstrategien von Spieler $\mathscr{A}$ und Spieler $\mathscr{B}$?

Wie groß sind die Erwartungsauszahlungen der Spieler?